ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1938

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

И. И. ПРИВАЛОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СВЯЗИ С ЕГО АНАЛИТИЧЕСКИМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучен класс B_q, $q \geqslant 1$, субгармонических функций внутри единичного шара в направлениях: a) внутренних их свойств; b) свойств граничного характера; c) аналитического представления, характеризующего функции этого класса. Установлено, что при $q > 1$ функция класса B_q может быть определена при помощи неравенства

$$\int u^{+q}(P)\, d\omega < K, \quad r < 1.$$

Будем обозначать через $u(P) = u(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ субгармоническую функцию внутри шара с центром в начале координат, радиуса 1, пространства $p \geqslant 2$ измерений.

Рассмотрим класс B_q субгармонических функций, определяемых следующим условием:

$$\int_e u^{+q}(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega, \qquad (B_q)$$

где $q \geqslant 1$, равномерно абсолютно непрерывная функция множества e, для $r < 1$.

В этом условии (B_q) мы через $d\omega$ обозначаем элемент единичной сферы, через e — любое измеримое множество точек единичной сферы.

Как известно (1), всякая субгармоническая функция $u(P)$ класса B_q имеет радиальные предельные значения $u(Q)$ почти всюду на единичной сфере, и эти предельные значения $u(Q)$ образуют суммируемую функцию вместе с $u^{+q}(Q)$.

Покажем, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу B_q, будет:

$$\lim_{r \to 1} \int u^{+q}(P)\, d\omega = \int u^{+q}(Q)\, d\omega,$$

где $u(Q)$ — радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$ на единичной шаровой поверхности, образующие суммируемую функцию вместе с $u^{+q}(Q)$. Как выше было замечено, из условия (B_q) следует стремление субгармонической функции $u(P)$ при $r \to 1$ к суммируемой функции $u(Q)$ почти для всех точек Q единичной шаровой поверхности, причем $u^{+q}(Q)$ тоже суммируема.

По известной теореме теории функций действительного переменного заключаем: если выполнено условие ($\mathrm{B_q}$), и, как было отмечено, $u^{+q}(P) \to u^{+q}(Q)$, когда $r \to 1$, почти всюду на единичной шаровой поверхности, то

$$\int u^{+q}(P)\, d\omega \to \int u^{+q}(Q)\, d\omega.$$

Обратно, если выполнено последнее условие, где $u(Q)$ суммируемые, вместе с $u^{+q}(Q)$, радиальные предельные значения субгармонической функции $u(P)$, то функция $u(P)$ принадлежит классу $\mathrm{B_q}$.

Действительно, согласно условию $\lim\limits_{r \to 1} u^{+q}(P) = u^{+q}(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности и $\int u^{+q}(P)\, d\omega \to \int u^{+q}(Q)\, d\omega$.

Так как функции $u^{+q}(P) = u^{+q}(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ неотрицательны, то, пользуясь теоремой Д. Ф. Егорова, легко показать, что при наших условиях автоматически будет выполнено соотношение

$$\int\limits_e u^{+q}(P)\, d\omega \to \int\limits_e u^{+q}(Q)\, d\omega.$$

После этого, принимая во внимание, что $\lim\limits_{r \to 1} u^{+q}(P) = u^{+q}(Q)$ почти всюду на единичной шаровой поверхности, заключаем на основании общей теоремы теории функций действительного переменного:

$$\int\limits_e u^{+q}(P)\, d\omega$$

есть равномерно абсолютно непрерывная функция множества e для $r < 1$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу $\mathrm{B_q}$, необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала этому классу.*

Для доказательства этой теоремы достаточно убедиться, что если субгармоническая функция удовлетворяет условию ($\mathrm{B_q}$), то тому же условию будет удовлетворять ее наилучшая гармоническая мажоранта.

Пусть $u(P)$ субгармоническая функция, удовлетворяющая условию ($\mathrm{B_q}$). Покажем, что ее наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ удовлетворяет тому же условию.

Так как $h(P) = h(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$ во всем единичном шаре, то для всякой точки P имеем:

$$h(P) = \lim_{R \to 1} h(P; R),$$

где положено

$$h(P; R) = h(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}; R)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega, \qquad (1)$$

интегрирование распространено на все точки $Q(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})$ единичной сферы, γ — угол между векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, $0 \leqslant r < R < 1$.

Из (1) имеем

$$h^+(P; R) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega. \quad (2)$$

Применяя неравенство Гельдера, из последнего соотношения получим

$$h^{+q}(P; R) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^{+q}(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega. \quad (3)$$

Сравнивая с неравенствами (2), мы видим, что (3) справедливо и при $q = 1$.

По условию нам дано, что $\int\limits_e u^{+q}(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})\, d\omega$ есть равномерно абсолютно непрерывная функция для $R < 1$; отсюда можно заключить, что

$$\lim_{R \to 1} \int u^{+q}(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega =$$

$$= \int u^{+q}(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega.$$

Следовательно,

$$h^{+q}(P) = \lim_{R \to 1} h^{+q}(P; R) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \lim_{R \to 1} \int u^{+q}(R, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2} d\omega}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^{+q}(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega$$

$$= I(u^{+q}; P).$$

Итак, $h^{+q}(P) \leqslant I(u^{+q}; P)$, где $I(u^{+q}; P)$ обозначает интеграл Пуассона, образованный для граничной функции $u^{+q}(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1})$ в точке P. Из последнего неравенства получим

$$\int\limits_e h^{+q}(P)\, d\omega \leqslant \int\limits_e I(u^{+q}; P)\, d\omega < \varepsilon,$$

если $\operatorname{mes} e < \eta = \eta(\varepsilon)$.

Это заключение сделано потому, что правая часть последнего неравенства равномерно абсолютно непрерывна при $r < 1$.

По доказанной теореме задача об аналитическом представлении субгармонической функции класса B_q приводится к изучению аналитического представления гармонической функции, принадлежащей тому же классу B_q. Докажем, что гармоническая функция класса B_q характеризуется ее аналитическим представлением при помощи интеграла Пуассона-Стильтьеса специального вида, а именно:

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}} h(Q)\, d\omega - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{(1-r^2)\, d\varphi(e)}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}, \quad (4)$$

где $\varphi(e) \geqslant 0$ имеет производную, почти всюду на единичной сфере равную 0, а функция $h(Q)$ суммируема вместе с $h^{+q}(Q)$.

В самом деле, из формулы (4) следует:

$$h^+(P) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}} h^+(Q)\, d\omega,$$

откуда по неравенству Гельдера

$$h^{+q}(P) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}} h^{+q}(Q)\, d\omega.$$

Последнее соотношение справедливо при $q \geqslant 1$. Отсюда

$$\int_e h^{+q}(P)\, d\omega \leqslant \int_e I(P)\, d\omega,$$

где $I(P)$ — интеграл Пуассона от положительной суммируемой функции. Заметив, что правая часть последнего неравенства представляет функцию множества e, абсолютно непрерывную равномерно для $r < 1$, заключаем, что и левая часть обладает тем же свойством.

Обратно, пусть $\int_e h^{+q}(P)\, d\omega$ равномерно абсолютно непрерывная функция множества e при $r < 1$. Тогда гармоническую функцию $h(P)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. Среди всевозможных таких представлений выберем такое, что $h(P) = p_1(P) - p_2(P)$, причем $p_1(P)$ наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $h^+(P)$.

Так как по условию $\int_e h^{+q}(P)\, d\omega$ изображает равномерно абсолютно непрерывную функцию для $r < 1$, то по доказанной выше теореме тем же свойством обладает $\int_e p_1^q(P)\, d\omega$. Если так, то $p_1(P)$ представима интегралом Пуассона от граничной функции $h^+(Q)$, причем $h^{+q}(Q)$ суммируема. Последнее заключение сделано потому, что $p_1^q(P)$ есть субгармоническая функция, имеющая на границе суммируемые радиальные предельные значения $h^{+q}(Q)$ (1).

Возвращаясь к соотношению $h(P)=p_1(P)-p_2(P)$, мы убеждаемся в справедливости доказываемого равенства (4).

Изучаемый здесь класс B_q в случае $q>1$ может быть охарактеризован другим внутренним свойством, эквивалентным определению. В самом деле, покажем, что необходимым и достаточным условием для субгармонической функции $u(P)$ класса B_q, $q>1$, будет

$$\int u^{+q}(P)\,d\omega < K, \quad r<1. \tag{5}$$

Очевидно, для субгармонической функции определенного здесь класса B_q неравенство (5) справедливо. Докажем, что, обратно, если $u(P)$ удовлетворяет неравенству (5), то она принадлежит классу B_q*.

С этой целью сначала покажем, что наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ субгармонической функции $u(P)$, удовлетворяющей неравенству (5), удовлетворяет тому же условию. Так как $h(P)$ есть наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$ во всем единичном шаре, то для всякой точки P имеем

$$h(P)=\lim_{R\to 1} h(P;R),$$

где $h(P;R)$ определяется формулой (1).

Согласно известной теореме теории функций действительного переменного можем написать:

$$\int h^{+q}(P)\,d\omega = \int \lim_{R\to 1} h^{+q}(P;R)\,d\omega \leqslant \overline{\lim_{R\to 1}} \int h^{+q}(P;R)\,d\omega; \tag{6}$$

с другой стороны, по формуле (3) имеем

$$h^{+q}(P;R) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^{+q}(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}) \frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2R\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega.$$

После этого неравенство (6) запишем так:

$$\int h^{+q}(P)d\omega \leqslant \overline{\lim_{R\to 1}} \int d\omega \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^{+q}(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1}) \frac{(R^2-r^2)R^{p-2}d\omega'}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}$$

$$=\overline{\lim_{R\to 1}} \int u^{+q}(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})\,d\omega'.$$

В силу условия (5) последний предел есть конечное постоянное. Итак, мы доказали, что наилучшая гармоническая мажоранта $h(P)$ удовлетворяет условию (5).

Займемся теперь выяснением аналитического представления гармонической функции $h(P)$, которая по только что доказанному удовлетворяет условию

$$\int h^{+q}(P)\,d\omega < K, \quad r<1 \quad (q>1).$$

* Эта теорема не верна для класса B_1. См.([2]).

Очевидно, гармоническую функцию $h(P)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. Среди всевозможных таких представлений выберем такое, что $h(P) = p_1(P) - p_2(P)$, причем $p_1(P)$ наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $h^+(P)$. Так как $\int h^{+q}(P)\,d\omega < K$, то по доказанному тому же условию удовлетворяет $\int p_1^q(P)\,d\omega$. Итак,

$$\int p_1^q(P)\,d\omega < K, \quad r < 1. \tag{7}$$

Кроме того, $p_1(Q) = h^+(Q)$ и $h^{+q}(Q)$ суммируема. Рассмотрим интеграл Пуассона

$$\pi_1(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int h^+(Q) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega$$

и покажем, что $p_1(P) \equiv \pi_1(P)$.

В самом деле, применяя неравенство Гельдера, находим:

$$\pi_1^q(P) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int h^{+q}(Q) \frac{(1-r^2)\,d\omega}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}},$$

откуда усматриваем, что $\int \pi_1^q(P)\,d\omega$ ограничен для $r < 1$, т. е.

$$\int \pi_1^q(P)\,d\omega < K_1, \quad r < 1. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) заключаем, что

$$\int |p_1(P) - \pi_1(P)|^q\,d\omega < \text{const для } r < 1.$$

Обозначая разность $p_1(P) - \pi_1(P)$ через $d(P)$, мы получаем гармоническую функцию $d(P)$, удовлетворяющую условию

$$\int |d(P)|^q\,d\omega < \text{const для } r < 1 \ (q > 1)$$

и стремящуюся к нулю почти для всякой точки Q единичной сферы, когда точка P стремится по радиусу к точке Q.

Докажем, что в этом случае $d(P) \equiv 0$, т. е.

$$p_1(P) \equiv \pi_1(P).$$

Считая P фиксированной точкой, отправляемся от формулы

$$d(P)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega, \quad (9)$$

где интегрирование распространено на все точки $Q(1,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})$ единичной сферы, γ — угол между векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, $0\leqslant r<R<1$.

По теореме Д. Ф. Егорова $\lim\limits_{R\to 1} d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})=0$ равномерно на множестве точек E единичной сферы, $\operatorname{mes} E>\frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ сколь угодно малое число.

Разбивая интеграл (9) на две части по областям интегрирования E и $C(E)$, получим:

$$|d(P)|\leqslant\overline{\lim_{R\to 1}}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int\limits_{C(E)}|d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})|\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, найдем:

$$\int\limits_{C(E)}|d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})|\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{C(E)}|d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})|^q\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}\,d\omega}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\right]^{\frac{1}{q}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{C(E)}\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega\right]^{\frac{q-1}{q}}.$$

Так как первый интеграл правой части этого неравенства при $R\to 1$ остается ограниченным ($<C$) согласно условию

$$\int|d(R,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p-1})|^q\,d\omega<\text{const},$$

а второй интеграл стремится при этом к пределу, равному

$$\int\limits_{C(E)}\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega=\eta_E(P),$$

то

$$|d(P)|\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)C^{\frac{1}{q}}}{2\pi^{\frac{p}{2}}}(\eta_E(P))^{\frac{q-1}{q}}.$$

Заметив, что $\eta_E(P) \to 0$ вместе с ε, мы убеждаемся из последнего неравенства в справедливости тождества $d(P) \doteq 0$, что и требовалось доказать.

Итак, показано, что в представлении $h(P) = p_1(P) - p_2(P)$ функция $p_1(P)$ определяется формулой Пуассона

$$p_1(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int h^+(Q) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega.$$

Следовательно, для $h(P)$ имеем следующее аналитическое представление:

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int h(Q) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega$$

$$- \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\varphi(e),$$

где $\varphi(e) \geqslant 0$ с производной, равной нулю почти всюду на единичной сфере, $h(Q)$ суммируема вместе с $h^{+q}(Q)$.

Из произведенного выше исследования класса B_q мы уже знаем, что полученное представление характеризует гармонические функции, принадлежащие этому классу B_q. Следовательно, $h(P)$ принадлежит классу B_q, а потому и субгармоническая функция $u(P)$, удовлетворяющая неравенству (5), принадлежит классу B_q, что и требовалось доказать.

Полагая, в частности, $u(P) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитическая функция внутри единичного круга, мы получаем класс B_q аналитических функций: $\int\limits_0^\varphi \ln^{+q}|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ $(q \geqslant 1)$ равномерно абсолютно непрерывная функция аргумента φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, для $r < 1$.

К этому классу аналитических функций приложима, в частности, изложенная теория субгармонических функций класса B_q. Так, всякая функция $f(z)$ класса B_q имеет конечные предельные значения по всем некасательным путям $f(e^{i\theta})$ почти всюду на единичной окружности *, причем $\ln|f(e^{i\theta})|$ есть суммируемая функция вместе с $\ln^{+q}|f(e^{i\theta})|$.

* Здесь мы пользуемся тем фактом, что если $\ln|f(z)|$ имеет конечные предельные значения по всем некасательным путям почти всюду на единичной окружности, то и $f(z)$ обладает тем же свойством.

Далее мы имеем следующее характеристическое свойство функций класса B_q: условие, необходимое и достаточное для того, чтобы аналитическая функция $f(z)$ принадлежала классу B_q, будет

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \ln^{+q}|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \ln^{+q}|f(e^{i\theta})|\,d\theta,$$

где $f(e^{i\theta})$—предельные значения аналитической функции $f(z)$ на единичной окружности, причем $\ln|f(e^{i\theta})|$ есть суммируемая функция вместе с $\ln^{+q}|f(e^{i\theta})|$.

Из предыдущего мы получим также аналитическое представление функций $f(z)$ класса B_q, его характеризующее, если явно выразим потенциал Грина и в формуле для $\ln|f(z)|$ добавим сопряженную часть. Таким путем мы найдем для функций класса B_q:

$$f(z) = C_1\, b(z) \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln p(\theta)\, \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta \times$$

$$\times \exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, dq(\theta),$$

где $b(z)$ — произведение Бляшке, $\ln p(\theta)$ суммируема вместе с $\ln^{+q} p(\theta)$, $q(\theta)$ — функция невозрастающая с производной, равной нулю почти всюду, $|C_1| = 1$. Очевидно, $p(\theta) = |f(e^{i\theta})|$ почти всюду на окружности *.

Наконец, класс B_q при $q > 1$ характеризуется условием

$$\int_0^{2\pi} \ln^{+q}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < K, \quad r < 1.$$

Математический институт
при Московском гос. университете.

Поступило
21. I. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Привалов И. И., Граничные задачи субгармонических и гармонических функций в пространстве, Математ. сб., т. 2, вып. 1, 1938.

[2] Привалов И. И., Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями, Изв. АН СССР, Математ. серия, № 2, 1938.

* Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $|f(z)| \to p(\theta)$ почти всюду по всем некасательным путям, то и $f(z) \to f(e^{i\theta})$.

I. I. PRIVALOFF. SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS SUBHARMONIQUES EN RAPPORT AVEC SA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

RÉSUMÉ

On considère dans le présent article une classe B_q de fonctions subharmoniques à l'intérieur de la sphère unitaire et définies par la condition

$$\int_e u^{+q}(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega,$$

où $q \geqslant 1$, est une fonction uniformément absolument continue de l'ensemble e pour $r < 1$.

On obtient une condition nécessaire et suffisante pour les fonctions $u(P)$ de la classe B_q et on construit un appareil analytique qui caractérise les fonctions subharmoniques de la classe B_q.

Enfin on démontre que pour $q > 1$ une fonction de la classe B_q peut être définie au moyen de l'inégalité

$$\int u^{+q}(r, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega < K, \quad r < 1.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

А. Я. ХИНЧИН

ТЕОРИЯ ЗАТУХАЮЩИХ СПОНТАННЫХ ЭФФЕКТОВ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье исследуются условия применимости закона больших чисел и предельной теоремы к вероятностной схеме спонтанно возникающих и в дальнейшем затухающих физических эффектов.

1. Введение

Настоящее исследование посвящено анализу одной вероятностной схемы, охватывающей собою большое число задач современной физики и техники.

Допустим, что в известные, случайно обусловленные моменты времени наступает некоторый эффект, выражающийся во внезапном возникновении некоторой величины x, значение которой также зависит от случая. Число и величина эффектов, возникающих в течение двух неперекрывающихся промежутков времени, предполагаются взаимно независимыми; вероятностные характеристики этих чисел не меняются с течением времени (однородность процесса). Известно, что если предположить вероятность наступления двух или более эффектов за малый промежуток времени Δt величиной бесконечно малой относительно Δt, то вероятность p_ν того, что в течение единицы времени наступит ровно ν эффектов, выражается формулой Пуассона

$$p_\nu = e^{-\lambda}\frac{\lambda^\nu}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

где λ — среднее число эффектов, наступающих в единицу времени.

Мы допустим, что возможные начальные значения эффектов заключены между двумя конечными числами a и b и подчиняются в этом интервале любому закону распределения $F(x)$. Величина эффекта, возникшего в некоторый момент t_0, с течением времени не остается неизменной, а меняется согласно некоторому закону, однозначно определяемому начальным значением x эффекта (в частности, не зависящему от момента возникновения t_0). Мы будем обозначать через $f(x, t)$ величину, которую имеет в момент $t_0 + t$ эффект, возникший в момент t_0 с начальным значением x. Эта функция выражает собою «затухание»

эффекта; относительно природы ее мы ограничимся предположениями *, что

$$|f(x,t)| < M, \quad \mu(x) = \int_0^\infty |f(x,t)|\,dt < C$$

для всех x интервала (a, b) и для всех t, где M и C — положительные постоянные; положим еще

$$m(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt,$$

$$m = \int_a^b m(x)\,dF(x).$$

Само собою разумеется, что мы полагаем

$$f(x,t) = 0 \ (t < 0), \quad f(x, 0) = x.$$

Допустим, что суммарная величина эффекта $\vartheta(t)$ в момент t получается простой суперпозицией значений, которые к этому моменту имеют все ранее возникшие эффекты. Так как мы предполагаем процесс простирающимся бесконечно (т. е. от $t = -\infty$), то

$$\vartheta(t) = \sum_r f(x_r, t - t_r)$$

представляется бесконечным рядом, где t_r — случайные моменты возникновения эффектов, а x_r — соответствующие начальные значения этих эффектов. Легко убедиться, что ряд этот абсолютно сходится с вероятностью 1 в силу предположений, сделанных нами относительно функции $f(x,t)$. В самом деле,

$$\xi(t) = \sum_r |f(x_r, t - t_r)| = \sum_{k=0}^\infty \xi_k(t),$$

где

$$\xi_k(t) = \sum_{k \leqslant t - t_r < k+1} |f(x_r, t - t_r)|.$$

Математическое ожидание величины $\xi_k(t)$

$$E\,\xi_k(t) = \sum_{\nu=0}^\infty p_\nu E_\nu\,\xi_k(t), \tag{1}$$

где E_ν означает математическое ожидание, вычисленное в предположении, что в течение промежутка $(t-k-1, \ t-k)$ возникло ровно ν эффектов. Так как в этом предположении каждый из этих ν эффектов с одинаковой вероятностью может возникнуть в любой момент указанного промежутка, то

$$E_\nu\,\xi_k(t) = \nu \int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} |f(x,t)|\,dt,$$

а потому в силу (1)

$$E\,\xi_k(t) = \lambda \int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} |f(x,t)|\,dt,$$

* В приложениях очень часто постулируют специальный закон затухания $f(x,t) = xe^{-\alpha t}$; иногда это делается без достаточных оснований и без всякой надобности.

так как

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_\nu = \lambda.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\,\xi_k(t) = \lambda \int_a^b dF(x) \int_0^{\infty} |f(x,t)|\, dt < C\lambda$$

сходится; совершенно аналогичным образом мы находим

$$E\{[\xi_k(t) - E\,\xi_k(t)]^2\} = \lambda \int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} \{f(x,t)\}^2\, dt,$$

вследствие чего ряд дисперсий

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{[\xi_k(t) - E\,\xi_k(t)]^2\} = \lambda \int_a^b dF(x) \int_0^{\infty} \{f(x,t)\}^2\, dt < \lambda MC$$

также сходится; а так как величины $\xi_k(t)$ и $\xi_l(t)$ при $k \neq l$ взаимно независимы, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(t)$ по известным признакам действительно сходится с вероятностью 1. В силу однородности процесса величина $\vartheta(t)$ имеет, разумеется, один и тот же закон распределения для всех значений t. Основным объектом, интересующим здесь прикладные науки, является поведение «среднего эффекта»

$$U(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \vartheta(v)\, dv$$

как случайной величины при больших значениях t. В частности, авторы пытаются установить наличие закона больших чисел, т. е. существование такого числа a, что вероятность

$$P\{|U(t) - a| > \varepsilon\} \to 0$$

при $t \to \infty$, при любом $\varepsilon > 0$. Однако, делается это, как правило, весьма кустарными способами, одновременно излишне громоздкими и логически небезупречными. Так, в недавно появившейся статье Роуланда (1) автор избегает понятия математического ожидания и вынужден поэтому пользоваться чрезвычайно громоздким аппаратом эмпирических средних; вместе с тем он без достаточных оснований заменяет интегралы функции $\vartheta(t)$, взятые по двум неперекрывающимся интервалам, взаимно независимыми случайными величинами.

Между тем, с точки зрения современных методов теории вероятностей, изучение асимптотических свойств величины $U(t)$ является очень несложной проблемой. Решение этой проблемы, идущее значительно дальше намеченных до настоящего времени результатов, и составляет собою содержание настоящей статьи.

2. Характеристическая функция величины $U(t)$

Заметим прежде всего, что если бы интегралы случайной функции $\vartheta(t)$, распространенные на неперекрывающиеся между собою промежутки времени, были взаимно независимы, то задача не требовала бы никакого специального исследования, и ее решение автоматически выте-

кало бы из хорошо известных свойств сумм взаимно независимых случайных величин. Но на самом деле раз возникший эффект продолжает, хотя и в постепенно ослабевающем виде, свое действие, и это создает взаимную зависимость между упомянутыми интегралами. Однако, благодаря затуханию эффекта (абсолютная интегрируемость функции $f(x, t)$), эффекты, возникшие в какой-либо промежуток времени, будут оказывать на величину функции $\vartheta(t)$ в другом, весьма отдаленном промежутке времени лишь незначительное влияние, так что значения функции $\vartheta(t)$ в двух весьма отдаленных промежутках времени мы можем рассматривать как почти независимые между собою. Это дает основание предполагать, что основные закономерности, имеющие место для средних арифметических большого числа взаимно независимых случайных величин, будут справедливы и для интересующей нас функции $U(t)$.

Решение поставленной нами задачи без принципиальных затруднений может быть получено элементарными методами. Однако, значительно более кратким является путь, основанный на применении характеристических функций. Поэтому мы начнем с отыскания характеристической функции

$$u_t(z) = E\left\{e^{izU(t)}\right\}$$

случайной величины $U(t)$. Положим

$$\vartheta_k(t) = \sum_{k \leqslant t_r < k+1} f(x_r, t - t_r), \qquad U_k(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \vartheta_k(v)\, dv,$$

так что

$$\vartheta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \vartheta_k(t), \quad U(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_k(t);$$

обозначим через $u_t^{(k)}(z)$ характеристическую функцию величины $U_k(t)$:

$$u_t^{(k)}(z) = E\left\{e^{izU_k(t)}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu E_\nu(e^{izU_k(t)})$$

(здесь и в дальнейшем мы пользуемся обозначениями, введенными в разделе 1); но

$$E_\nu(e^{izU_k(t)}) = \left\{E_{k \leqslant t_r < k+1}\left[e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x_r, v - t_r)\, dv}\right]\right\}^\nu = \left\{\int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} du\, e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x, v-u)\, dv}\right\}^\nu,$$

откуда

$$u_t^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu \left\{\int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} du\, e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x, v-u)\, dv}\right\}^\nu$$

$$= \exp\left(\lambda \int_a^b dF(x) \int_k^{k+1} du \left\{e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x, v-u)\, dv} - 1\right\}\right);$$

а так как величины $U_k(t)$ с различными k взаимно независимы, то

$$u_t(z)=\prod_{k=-\infty}^{+\infty} u_t^{(k)}(z)=\exp\left(\lambda\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty} du\left\{e^{\frac{it}{t}\int_0^t f(x,v-u)\,dv}-1\right\}\right). \qquad (2)$$

Это и есть выражение характеристической функции величины $U(t)$. Могущие здесь возникнуть вопросы сходимости легко разрешаются в силу сделанных нами допущений о функции $f(x,t)$ тем же способом, как в разделе 1.

3. Закон больших чисел

Пользуясь формулой (2), найдем прежде всего моменты первых двух порядков величины $U(t)$. Имеем

$$u_t'(z)=u_t(z)\lambda\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty} du\left\{e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x,v-u)\,dv}\frac{i}{t}\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\},$$

причем законность дифференцирования вытекает из того, что интеграл правой части сходится равномерно относительно z на всей вещественной оси. В частности,

$$u_t'(0)=\lambda\int_a^b dF(x)\frac{i}{t}\int_0^t dv\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v-u)\,du=i\lambda\int_a^b m(x)\,dF(x)=i\lambda m.$$

Далее,

$$u_t'(z)-u_t'(0)=\{u_t(z)-1\}\frac{u_t'(z)}{u_t(z)}+\frac{u_t'(z)}{u_t(z)}-u_t'(0).$$

Так как очевидно

$$\lim_{z\to 0}\frac{u_t(z)-1}{z}\,\frac{u_t'(z)}{u_t(z)}=\{u_t'(0)\}^2=-\lambda^2m^2,$$

и, с другой стороны,

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left\{\frac{u_t'(z)}{u_t(z)}-u_t'(0)\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\lambda\int_a^b dF(x)\frac{i}{t}\int_0^t dv\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v-u)\left\{\frac{e^{\frac{iz}{t}\int_0^t f(x,v-u)\,dv}-1}{z}\right\}du$$

$$=-\frac{\lambda}{t^2}\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty} du\left\{\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\}^2$$

(где законность перехода к пределу под знаком интеграла снова не вызывает сомнений), то существует

$$u_t''(0)=-\lambda^2m^2-\frac{\lambda}{t^2}\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty} du\left\{\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\}^2.$$

Это же, как известно, показывает для величины $U(t)$ существование момента второго порядка

$$E\{U^2(t)\}=-u_t''(0),$$

а следовательно, и момента первого порядка

$$E\{U(t)\} = \frac{1}{t} u_t'(0) = \lambda m;$$

отсюда дисперсия величины $U(t)$ равна

$$D^2(t) = E\{U^2(t)\} - \{EU(t)\}^2 = \frac{\lambda}{t^2} \int_a^b dF(x) \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\{ \int_0^t f(x, v-u)\, dv \right\}^2.$$

В силу неравенства Чебышева, для доказательства закона больших чисел в виде

$$P\{|U(t) - \lambda m| > \varepsilon\} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

достаточно показать, что

$$D^2(t) \to 0 \quad (t \to \infty). \tag{3}$$

Но

$$D^2(t) \leqslant \frac{\lambda}{t^2} \int_a^b dF(x) \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\{ \int_0^t |f(x, v-u)|\, dv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, v-u)|\, dv \right\}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{t^2} \int_a^b \mu(x)\, dF(x) \int_0^t dv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, v-u)|\, du$$

$$= \frac{\lambda}{t} \int_a^b \mu^2(x)\, dF(x) < \frac{\lambda C^2}{t},$$

откуда и следует соотношение (3). Таким образом, величина $U(t)$ подчиняется закону больших чисел.

Мы можем, однако, высказать еще более сильное утверждение: *с вероятностью равной единице имеет место соотношение*

$$U(t) \to \lambda m \quad (t \to \infty)$$

(усиленный закон больших чисел). Без всяких вычислений мы можем заключить это из следующих соображений: исследуемый нами процесс является стационарным *, а для всякого стационарного процесса в силу известной теоремы Биркхоффа ([2]) величина $U(t)$ с вероятностью 1 стремится при $t \to \infty$ к некоторому пределу (который, вообще говоря, может зависеть от случая). В нашем процессе, как мы показали, величина $U(t)$ modo Bernoulliano стремится к λm (закон больших чисел); следовательно, существующий в силу теоремы Биркхоффа предел ее с вероятностью 1 должен совпадать с λm.

4. Предельная теорема

Аналогия между величиной $U(t)$ и средним арифметическим возрастающего числа взаимно независимых случайных величин простирается, однако, значительно дальше, чем это устанавливает закон больших чисел. Мы покажем теперь, что при весьма широких предположениях уклонение $U(t) - \lambda m$, после нормирования его посредством деления на среднее квадратическое отклонение $D(t)$, подчиняется в пределе закону Гаусса

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du,$$

---

* Т. е. вероятностный режим одинаков для двух любых промежутков времени одинаковой длины.

т. е. что для величины $U(t)$ имеет место так называемая центральная предельная теорема теории вероятностей. Так как характеристическая функция закона Гаусса есть $e^{-\frac{1}{2}z^2}$, то мы должны будем показать, что характеристическая функция

$$e^{-\frac{i\lambda mz}{D(t)}} u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right)$$

величины $\frac{U(t)-\lambda m}{D(t)}$ при $t \to \infty$ имеет своим пределом функцию $e^{-\frac{1}{2}z^2}$, или, что то же,

$$-\frac{i\lambda m}{D(t)}z + \lg u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right) \to -\frac{1}{2}z^2 \quad (t \to \infty)$$

равномерно в любом конечном интервале величины z. Мы покажем, что это соотношение будет иметь место во всех случаях, когда

$$tD(t) \to \infty \quad (t \to \infty)$$

—условие, аналогичное требованию безграничного возрастания дисперсии для случая суммы возрастающего числа взаимно независимых случайных величин (где это требование служит необходимым и достаточным условием применимости предельной теоремы при весьма широких прочих предположениях). В силу формулы (2) (§ 2)

$$\lg u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right) = \lambda \int_a^b dF(x) \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\{ e^{\frac{iz}{tD(t)}\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv} - 1 \right\}.$$

Но

$$\left| e^{\frac{iz}{tD(t)}\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv} - 1 - \frac{iz}{tD(t)}\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv + \frac{z^2}{2t^2D^2(t)}\left\{\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv\right\}^2 \right| \leqslant \frac{\Gamma |z|^3}{t^3D^3(t)}\left\{\left|\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv\right|\right\}^3,$$

где Γ — абсолютная постоянная; с другой стороны,

$$\lambda \int_a^b dF(x) \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\{\frac{iz}{tD(t)}\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv\right\} = \\ = \frac{iz\lambda}{tD(t)}\int_0^t d\left\{v\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, s)\, ds\right\} = \frac{i\lambda mz}{D(t)}$$

и

$$\lambda \int_a^b dF(x) \int_{-\infty}^{+\infty} du \left\{-\frac{z^2}{2t^2D^2(t)}\left[\int_0^t f(x,\, v-u)\, dv\right]^2\right\} = -\frac{z^2}{2};$$

поэтому

$$\left|-\frac{i\lambda mz}{D(t)}+\lg u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right)+\frac{z^2}{2}\right|\leqslant\frac{\Gamma|z|^3}{t^3D^3(t)}\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}du\left\{\left|\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right|\right\}^3$$

$$\leqslant\frac{\Gamma|z|^3}{t^3D^3(t)}\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}du\left\{\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\}^2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,s)|\,ds$$

$$=\frac{\Gamma|z|^3}{t^3D^3(t)}\int_a^b \mu(x)\,dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}du\left\{\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\}^2$$

$$\leqslant\frac{C\Gamma|z|^3}{tD(t)}.$$

Таким образом, если при $t\to\infty$

$$tD(t)\to\infty,$$

то мы действительно имеем равномерно в любом конечном интервале переменной z

$$-\frac{i\lambda m}{D(t)}z+\lg u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right)\to-\frac{z^2}{2}\quad(t\to\infty),$$

чем предельная теорема и доказана.

Посмотрим теперь несколько ближе, что означает условие

$$tD(t)\to\infty\quad(t\to\infty).$$

Мы имеем при любом $A>0$

$$t^2D^2(t)=\lambda\int_a^b dF(x)\int_{-\infty}^{+\infty}du\left\{\int_0^t f(x,v-u)\,dv\right\}^2$$

$$\geqslant\lambda\int_a^b dF(x)\int_0^A du\left\{\int_0^{t-u} f(x,s)\,ds\right\}^2$$

$$\geqslant\lambda\int_0^A du\int_a^b\left\{\int_0^{t-A} f(x,s)\,ds\right\}^2 dF(x)$$

$$=\lambda A\int_a^b\left\{\int_0^{t-A} f(x,s)\,ds\right\}^2 dF(x).$$

Но при $t\to\infty$

$$\int_0^{t-A} f(x,s)\,ds\to m(x),$$

и, следовательно, при достаточно большом t

$$t^2D^2(t)>\lambda A\left\{\int_a^b m^2(x)\,dF(x)-\varepsilon\right\}$$

$$\geqslant\lambda A\left\{\left[\int_a^b m(x)\,dF(x)\right]^2-\varepsilon\right\}$$

$$=\lambda A(m^2-\varepsilon),$$

где ε — как угодно малое положительное число. Так как при этом A может быть выбрано сколь угодно большим, то условие $m\neq 0$ достаточно для того, чтобы $tD(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, а следовательно, как мы

знаем, и для справедливости предельной теоремы. Таким образом, предельная теорема в изучаемой нами схеме имеет место всякий раз, когда величина m, выражающая собою среднее значение (т. е. математическое ожидание) интегрального привзноса (т. е. величины $\int_0^\infty f(x, v)\,dv$) единичного эффекта, отлична от нуля. При этом из нашего вывода в достаточной степени очевидно, что условие это ни в коей мере не является необходимым для применимости предельной теоремы; она может иметь силу и при условии, что $m(x)=0$ для любого x; важно только, чтобы интеграл $\int_0^A f(x, v)\,dv$ при $A \to \infty$ не стремился к нулю слишком быстро; ибо если это стремление происходит с достаточной быстротой, то в определении величины $\int_0^t \vartheta(u)\,du$ осязательным образом принимают участие лишь эффекты, возникшие либо незадолго до момента 0, либо незадолго до момента t, все же остальные при интеграции дают ничтожно малые величины; вследствие этого закон распределения, а потому и дисперсия $t^2D^2(t)$ величины $\int_0^t \vartheta(u)\,du$ с ростом t почти не меняется, а следовательно, не может возрастать безгранично. Простой пример этого рода мы получим, полагая

$$F(x)=\begin{Bmatrix}1 & (x>1)\\ 0 & (x<1)\end{Bmatrix}; \qquad f(1, t)=f(t)=\begin{Bmatrix}+1 & \left(0<t<\frac{1}{2}\right)\\ -1 & \left(\frac{1}{2}<t<1\right)\\ 0 & (t<0 \text{ и } t>1)\end{Bmatrix}.$$

Так как при $\alpha \leqslant 0 < 1 \leqslant \beta$

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=0,$$

то в образовании величины $U(t)$ участвуют лишь эффекты, возникшие в промежутках $(-1, 0)$ и $(t-1, t)$; это показывает, что при $t>1$ закон распределения величины $tU(t)$ вообще не зависит от t, вследствие чего, разумеется, предельная теорема не может иметь места. Несложный подсчет для этого случая дает:

$$tD(t)=\sqrt{\frac{\lambda}{6}} \quad (t>1),$$

$$u_t\left(\frac{z}{D(t)}\right)=\exp\left(2\lambda\left\{\frac{\sin\left(z\sqrt{6}/2\sqrt{\lambda}\right)}{z\sqrt{6}/2\sqrt{\lambda}}-1\right\}\right) \quad (t>1).$$

Математический институт
при Московском гос. университете.

Поступило
28.II.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rowland E. N., Proc. Cambridge Philos. Soc., **32**, 580—597, 1936.
[2] Колмогоров А. Н., Математ. сборник, 2 (44), 367—368, 1937.

A. KHINTCHINE. THEORIE DER ABKLINGENDEN SPONTANEFFEKTE

ZUSAMMENFASSUNG

Die Abhandlung enthält Untersuchungen über ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Schema, welches verschiedenen physikalischen und technischen Erscheinungen zugrunde liegt.

In gewissen zufallsmässig verteilten Zeitpunkten entstehe ein Effekt, dessen ursprüngliche Grösse x eine zufällige Variable sei; die möglichen Werte von x sollen einem endlichen Intervall (a, b) angehören, im übrigen darf sein Verteilungsgesetz $F(x)$ beliebig ausfallen. Ist der Anfangswert des Effekts im Moment t_0 seiner Entstehung gleich x, so soll sein Wert zur Zeit t_0+t durch die Funktion $f(x, t)$ gegeben sein. Es wird die Existenz zweier positiver Konstanten M und C angenommen, so dass stets

$$|f(x, t)| < M, \quad \int_0^\infty |f(x, t)| \, dt < C$$

ist. Ferner soll

$$m(x) = \int_0^\infty f(x, t) \, dt, \qquad m = \int_a^b m(x) \, dF(x)$$

gesetzt werden. Schliesslich wird angenommen, dass das Geschehen in zwei getrennten Zeitintervallen gegenseitig stochastisch unabhängig ist.

Der Totalbetrag des Effekts zur Zeit t wird durch

$$\vartheta(t) = \sum_r f(x_r, t - t_r)$$

gegeben, wo die t_r die Zeitpunkte der Entstehung der einzelnen Effekte und die x_r ihre zugehörigen Anfangswerte bedeuten. Den Gegenstand der Untersuchung bildet das Verhalten des «mittleren» Effekts

$$U(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \vartheta(u) \, du$$

als zufälliger Grösse bei $t \to \infty$.

Zunächst wird für die charakteristische Funktion $u_t(z)$ von $U(t)$ der Ausdruck (2) aufgestellt, wo λ die mittlere Anzahl der in der Zeiteinheit entstehenden Effekte bedeutet. Daraus werden leicht Mittelwert und Streuung von $U(t)$ berechnet. Eine einfache Anwendung der Tchebycheffschen Ungleichung ergibt dann, dass $U(t)$ dem Gesetz der grossen Zahlen unterliegt. Wegen der Stationarität des betrachteten stochastischen Prozesses folgt nach dem Birkhoffschen Ergodensatz, dass auch das «starke» Gesetz der grossen Zahlen gilt. Schliesslich wird gezeigt, dass unter sehr allgemeinen weiteren Annahmen auch der zentrale Grenzwertsatz erfüllt wird; insbesondere reicht dazu schon die Bedingung $m \neq 0$ aus, die jedoch keineswegs notwendig ist.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Д. А. РАЙКОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЦЕНТРАЛЬНЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЗАКОНОМ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье устанавливается сводимость центрального предельного закона теории вероятностей к закону больших чисел.

Последовательность взаимно независимых случайных величин $\{x_k\}$ подчиняется *центральному предельному закону*, если существуют такие последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $(a_n > 0,\ b_n \gtreqless 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$, что распределение случайной величины $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n$ стремится к нормальному, т. е.

$$L\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n\right\} \to G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \text{ [1]},$$

причем отдельные слагаемые $\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}$ равномерно бесконечно малы по вероятности,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob}\left\{\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}\right\} = 0 \quad [1 \leqslant k \leqslant n] \text{ [2]}.$$

Последовательность взаимно независимых н е о т р и ц а т е л ь н ы х случайных величин $\{y_k\}$ называется *относительно устойчивой*, если существует такая последовательность положительных чисел $\{A_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} y_k = 1,$$

---

[1] Через $L\{X\}$ мы будем обозначать закон распределения случайной величины X. Обозначение $G(x)$ для нормального закона распределения сохраняется на протяжении всей статьи.

[2] Говорят, что случайные величины X_n при $n \to \infty$ стремятся по вероятности к пределу a, если вероятность того, что X_n отличается от a больше чем на ε, стремится к нулю при любом $\varepsilon > 0$. Предел по вероятности мы обозначаем символом lim prob. Следуя обозначению, введенному А. Я. Хинчиным, мы в квадратных скобках, следующих за некоторым предельным соотношением, указываем область значений параметров, в которой это соотношение выполняется р а в н о м е р н о.

причем отдельные слагаемые $\frac{y_k}{A_n}$ равномерно бесконечно малы по вероятности,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{y_k}{A_n} = 0 \quad [1 \leqslant k \leqslant n].$$

Относительная устойчивость представляет собой наиболее естественную для последовательностей неотрицательных случайных величин общую форму закона больших чисел.

Рассматривая случай равнораспределенных величин, А. Я. Хинчин заметил аналогию между условиями справедливости центрального предельного закона и условиями относительной устойчивости. Руководствуясь этой аналогией, А. Я. Хинчин сформулировал общий признак относительной устойчивости, который вслед за тем был доказан А. А. Бобровым (1). Эта же аналогия была обнаружена и для того случая, когда все x_k имеют конечные вторые моменты, соответственно все y_k — конечные первые моменты (2).

Доказываемыми в настоящей работе теоремами выясняется вероятностный смысл этой аналогии и устанавливается принципиальное сведение центрального предельного закона теории вероятностей к закону больших чисел.

§ 1

Мы будем говорить, что случайная величина X центрирована медианой, если она имеет медианой 0, т. е. если $P(X < 0) \leqslant \frac{1}{2} \geqslant P(X > 0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы последовательность взаимно независимых случайных величин* $\{x_k\}$, *центрированных медианами, подчинялась центральному предельному закону, необходимо и достаточно, чтобы последовательность квадратов этих величин* $\{x_k^2\}$ *была относительно устойчива.*

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1 (А. Я. Хинчина (7, стр. 68); П. Леви (9, стр. 107)). *Пусть*

$$\{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

последовательность серий случайных величин, взаимно независимых в каждой серии $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk_n}$ *и равномерно бесконечно малых по вероятности. Пусть при* $n \to \infty$

$$L\{x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nk_n}\} \to G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right), \tag{1}$$

где $G(x)$ — *нормальный закон распределения,* $\alpha \gtreqless 0$ *и* $\sigma \geqslant 0$, *причем в случае* $\sigma = 0$ *под* $G\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$ *понимается «единичный» закон распределения* $\varepsilon(x-\alpha)$, *т. е. закон распределения случайной величины, принимающей с вероятностью 1 значение* α. *Тогда* $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} |x_{nk}|$ *будет бесконечно малым по вероятности или, что эквивалентно этому, при* $n \to \infty$

$$\sum_{k-1}^{k_n} P(|x_{nk}| > \varepsilon) \to 0\ ^3$$

для каждого $\varepsilon > 0$.

[3] Через $P(E)$ обозначается вероятность события E.

В своей монографии (7) А. Я. Хинчин доказывает эту лемму (и притом с помощью элементарных,—хотя и довольно тонких,—вероятностных рассмотрений) для случая, когда все x_{nk} симметричны (так что $\alpha=0$), причем $\sigma=1$. На случай произвольного $\sigma>0$ это доказательство распространяется тривиально. Для случая $\sigma=0$ оно, как нетрудно видеть, также остается в силе. Распространение утверждения леммы на случай произвольно распределенных равномерно бесконечно малых по вероятности x_{nk} основывается на очевидном неравенстве

$$P(|X-Y|>\varepsilon)\geqslant P(|X|>\varepsilon+\delta)\,P(|Y|<\delta)\,^4. \tag{2}$$

Именно, пусть y_{nk} случайные величины, равнораспределенные с соответственными x_{nk} и независимые как от x_{nk}, так и между собой в каждой серии. В силу (1) имеем

$$L\left\{\sum_{k=1}^{k_n}(x_{nk}-y_{nk})\right\}\to G\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\quad(n\to\infty).$$

Так как $x_{nk}-y_{nk}$ симметричны, то

$$\sum_{k=1}^{k_n}P(|x_{nk}-y_{nk}|>\varepsilon)\to 0\quad(n\to\infty)$$

для каждого $\varepsilon>0$. Но в силу (2)

$$\sum_{k=1}^{k_n}P(|x_{nk}-y_{nk}|>\varepsilon)\geqslant\sum_{k=1}^{k_n}P(|x_{nk}|>\varepsilon+\delta)\,P(|y_{nk}|<\delta),$$

и так как $P(|y_{nk}|<\delta)$ при $n\to\infty$ стремятся к единице равномерно относительно k, а ε и δ произвольны, то утверждение леммы доказано.

Остальные леммы совершенно однотипны и очень просто доказываются с помощью характеристических функций.

ЛЕММА 2. *Пусть, в схеме леммы 1, случайные величины x_{nk} равномерно бесконечно малы не только по вероятности, но и наверное, т. е. $|x_{nk}|\leqslant\varepsilon_n$ $(1\leqslant k\leqslant k_n)$, причем $\varepsilon_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Пусть*

$$L\{x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nk_n}\}\to G(x)\quad(n\to\infty). \tag{3}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{k_n}D(x_{nk})=\sum_{k=1}^{k_n}\left\{E(x_{nk}^2)-[E(x_{nk})]^2\right\}\to 1\quad(n\to\infty)\ ^5.$$

Доказательство. Пусть y_{nk} имеют то же значение, что и в доказательстве предыдущей леммы, далее $x_{nk}^*=x_{nk}-y_{nk}$, $s_n^*=\sum_{k=1}^{k_n}(x_{nk}-y_{nk})$, $\varphi_{nk}^*(t)$ — характеристическая функция случайной величины x_{nk}^*, $\varphi_n^*(t)$ — характеристическая функция случайной величины s_n^*. В силу (3) имеем

$$L\{s_n^*\}\to G\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

---

[4] X и Y предполагаются взаимно независимыми, δ — произвольное положительное число.

[5] $D(X)$ — дисперсия, $E(X)$ — математическое ожидание случайной величины X. Эти обозначения сохраняются на протяжении всей статьи.

следовательно

$$\varphi_n^*(t) \to e^{-t^2} \quad [|t| \leqslant T] \tag{4}$$

для произвольного фиксированного положительного T. Разлагая $\varphi_{nk}^*(t)$ по формуле Тейлора в интервале $|t| \leqslant T$, получим в силу неравенства $|x_{nk}| \leqslant \varepsilon_n$

$$\varphi_{nk}^*(t) = 1 - D(x_{nk}^*)\frac{t^2}{2}\left\{1 + O(\varepsilon_n^2)\right\} \quad [1 \leqslant k \leqslant k_n, \ |t| \leqslant T],$$

$$\ln \varphi_{nk}^*(t) = \ln\left\{1 + [\varphi_{nk}^*(t) - 1]\right\} = \varphi_{nk}^*(t) - 1 + O(|\varphi_{nk}^*(t) - 1|^2)$$
$$= -D(x_{nk}^*)\frac{t^2}{2}\left\{1 + O(\varepsilon_n^2)\right\} \quad [1 \leqslant k \leqslant k_n, \ |t| \leqslant T];$$

$$\ln \varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \ln \varphi_{nk}^*(t)$$
$$= -\sum_{k=1}^{k_n} D(x_{nk}^*)\frac{t^2}{2}\left\{1 + O(\varepsilon_n^2)\right\} \quad [|t| \leqslant T].$$

Отсюда в силу (4) имеем

$$\sum_{k=1}^{k_n} D(x_{nk}^*) \to 2.$$

Но

$$D(x_{nk}^*) = 2D(x_{nk}).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k_n} D(x_{nk}) \to 1 \quad (n \to \infty),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2′. *Пусть*

$$\left\{y_{n1}, \ y_{n2}, \ \ldots, \ y_{nk_n}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

последовательность серий неотрицательных случайных величин, взаимно независимых в каждой серии и равномерно бесконечно малых:

$$y_{nk} \leqslant \delta_n \ (1 \leqslant k \leqslant k_n) \quad \text{и} \quad \delta_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

Если тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \sum_{k=1}^{k_n} y_{nk} = 1, \tag{5}$$

то

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(y_{nk}) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Доказательство. Пусть $\psi_{nk}(t)$ характеристическая функция случайной величины y_{nk} и $\phi_n(t)$ характеристическая функция случайной величины $y_{n1} + y_{n2} + \ldots + y_{nk_n}$. Разлагая $\psi_{nk}(t)$ по формуле Тейлора в интервале $|t| \leqslant T$, где T — произвольное фиксированное положительное число, получаем

$$\psi_{nk}(t) = 1 + iE(y_{nk})t\left\{1 + O(\delta_n)\right\} \quad [1 \leqslant k \leqslant k_n, \ |t| \leqslant T],$$
$$\ln \psi_{nk}(t) = iE(y_{nk})t\left\{1 + O(\delta_n)\right\} \quad [1 \leqslant k \leqslant k_n, \ |t| \leqslant T],$$
$$\ln \phi_n(t) = i\sum_{k=1}^{k_n} E(y_{nk})t\left\{1 + O(\delta_n)\right\} \quad [|t| \leqslant T]. \tag{6}$$

Но в силу (5)

$$\ln \psi_n(t) \to it \qquad [|t| \leqslant T];$$

в соединении с (6) это дает

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(y_{nk}) \to 1 \quad (n \to \infty),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3 (П. Леви ([9], стр. 102)). *Пусть, в схеме леммы* 1,

$$|x_{nk}| \leqslant c_n = o\left\{\sum_{k=1}^{k_n} D(x_{nk})\right\} \qquad (1 \leqslant k \leqslant k_n,\ n = 1, 2, \ldots \to \infty).$$

Тогда

$$L\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{k_n} x_{nk} - \sum\limits_{k=1}^{k_n} E(x_{nk})}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{k_n} D(x_{nk})}}\right\} \to G(x) \qquad (n \to \infty).$$

Доказательство см. в цитированной монографии П. Леви, стр. 102—103.

ЛЕММА 3′. *Пусть, в схеме леммы* 2′,

$$y_{nk} \leqslant d_n = o\left\{\sum_{k=1}^{k_n} E(y_{nk})\right\} \quad (1 \leqslant k \leqslant k_n,\ n = 1, 2, \ldots \to \infty).$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{prob} \frac{\sum\limits_{k=1}^{k_n} y_{nk}}{\sum\limits_{k=1}^{k_n} E(y_{nk})} = 1.$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 3. Пусть $\psi_{nk}(t)$ и $\psi_n(t)$ имеют то же значение, что и в доказательстве леммы 2′, и

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} E(y_{nk}).$$

Разлагая $\psi_{nk}\left(\frac{t}{A_n}\right)$ по формуле Тейлора в интервале $|t| \leqslant T$, где T — произвольное фиксированное положительное число, получаем

$$\psi_{nk}\left(\frac{t}{A_n}\right) = 1 + it\frac{E(y_{nk})}{A_n}\left\{1 + O\left(\frac{d_n}{A_n}\right)\right\} \qquad [1 \leqslant k \leqslant k_n,\ \ |t| \leqslant T],$$

$$\ln \psi_{nk}\left(\frac{t}{A_n}\right) = it\frac{E(y_{nk})}{A_n}\left\{1 + O\left(\frac{d_n}{A_n}\right)\right\} \qquad [1 \leqslant k \leqslant k_n,\ \ |t| \leqslant T],$$

$$\ln \psi_n\left(\frac{t}{A_n}\right) = it\left\{1 + O\left(\frac{d_n}{A_n}\right)\right\} = it\{1 + o(1)\} \qquad [|t| \leqslant T].$$

Тем самым лемма 3′ доказана, ибо $\psi_n\left(\frac{t}{A_n}\right)$ есть характеристическая функция случайной величины $\frac{1}{A_n}\sum\limits_{k=1}^{k_n} y_{nk}$.

Доказательство теоремы 1. а) Необходимость. По предположению, существуют такие последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ($a_n > 0$, $b_n \gtreqless 0$, $n = 1, 2, \ldots$), что

$$L\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n\right\} \longrightarrow G(x) \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{7}$$

Так как x_k имеют медианой 0, то и $\frac{x_k}{a_n}$ имеют медианой 0, следовательно, медианой величин $\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ служит $-\frac{b_n}{n}$. Но эти величины равномерно бесконечно малы по вероятности $[1 \leqslant k \leqslant n]$, следовательно,

$$\frac{b_n}{n} = o(1) \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{8}$$

По лемме 1

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{9}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Отсюда в силу (8) также

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{a_n}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{10}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что тогда существует такая последовательность

$$\varepsilon_n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

что

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{a_n}\right| \geqslant \varepsilon_n\right) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{11}$$

Введем в рассмотрение «урезанные» случайные величины

$$x_{nk} = \begin{cases} -\varepsilon_n, & \text{когда } \frac{x_k}{a_n} \leqslant -\varepsilon_n, \\ \frac{x_k}{a_n}, & \text{когда } \left|\frac{x_k}{a_n}\right| \leqslant \varepsilon_n, \\ +\varepsilon_n, & \text{когда } \frac{x_k}{a_n} \geqslant +\varepsilon_n \end{cases}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n,\ n = 1, 2, \ldots)$. При каждом фиксированном значении n эти величины взаимно независимы и не превосходят по модулю ε_n.

Так как $\sum_{k=1}^{n} x_{nk} - b_n$ может отличаться от $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n$ лишь в том случае, если хотя бы одно x_{nk} отличается от соответствующего $\frac{x_k}{a_n}$, т. е. в силу (11) с вероятностью, при $n \longrightarrow \infty$ стремящейся к нулю, то вместе с (7) имеем также

$$L\left\{\sum_{k=1}^{n} x_{nk} - b_n\right\} \longrightarrow G(x) \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Отсюда по лемме 2

$$\sum_{k=1}^{n} D\left(x_{nk}-\frac{b_n}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n} D(x_{nk})=\sum_{k=1}^{n}\left\{E(x_{nk}^2)-[E(x_{nk})]^2\right\}\longrightarrow 1\ (n\longrightarrow\infty) \quad (12)$$

и, значит,

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2)\geqslant 1. \quad (13)$$

Это показывает, что

$$\varepsilon_n^2=o\left\{\sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2)\right\} \quad (n\longrightarrow\infty),$$

и так как $x_{nk}^2\leqslant\varepsilon_n^2$, а величины x_{nk} при каждом фиксированном n взаимно независимы, то мы можем применить к последовательности серий $\left\{x_{n1}^2, x_{n2}^2, \ldots, x_{nn}^2\right\}$ лемму 3′; это дает

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{prob}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_{nk}^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2)}=1.$$

Но в силу (11) $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{nk}^2$ может отличаться от $\frac{1}{a_n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ лишь с вероятностью, при $n\longrightarrow\infty$ стремящейся к нулю, следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{prob}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}{a_n^2\sum\limits_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2)}=1. \quad (14)$$

А это означает, что последовательность $\left\{x_k^2\right\}$ относительно устойчива, с нормирующими коэффициентами

$$A_n=a_n^2\sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2). \quad (15)$$

б) Достаточность. Одновременно с x_k также $x_k^2\ (k=1, 2, \ldots)$ взаимно независимы. Так как по предположению существует такая последовательность $\left\{A_n\right\}$ $(A_n>0)$, что

$$L\left\{\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right\}\longrightarrow\varepsilon(x-1) \quad (n\longrightarrow\infty) \quad (16)$$

и $\frac{x_k^2}{A_n}$ равномерно относительно n бесконечно малы по вероятности, то в силу леммы 1

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\frac{x_k^2}{A_n}>\delta\right)\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty)$$

для всякого $\delta>0$. Тогда существует такая последовательность $\delta_n\longrightarrow 0$, что

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{\sqrt{A_n}}\right|\geqslant\delta_n\right)\longrightarrow 0 \quad (n\longrightarrow\infty). \quad (17)$$

Введем в рассмотрение «урезанные» случайные величины

$$z_{nk} = \begin{cases} -\delta_n, & \text{когда } \frac{x_k}{\sqrt{A_n}} \leqslant -\delta_n, \\ \frac{x_k}{\sqrt{A_n}}, & \text{когда } \left|\frac{x_k}{\sqrt{A_n}}\right| \leqslant \delta_n, \\ +\delta_n, & \text{когда } \frac{x_k}{\sqrt{A_n}} \geqslant +\delta_n \end{cases}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n, n = 1, 2, \ldots)$. При каждом фиксированном значении n эти величины взаимно независимы и не превосходят по модулю δ_n.

Так как $\sum_{k=1}^{n} z_{nk}^2$ может отличаться от $\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ лишь в том случае, если хотя бы одно z_{nk} отличается от соответствующего $\frac{x_k}{\sqrt{A_n}}$, т. е. в силу (17) с вероятностью, при $n \to \infty$ стремящейся к нулю, то вместе с (16) имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \sum_{k=1}^{n} z_{nk}^2 = 1.$$

Отсюда по лемме 2′

$$\sum_{k=1}^{n} E(z_{nk}^2) \to 1 \quad (n \to \infty). \tag{18}$$

Покажем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} D(z_{nk}) = \varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ E(z_{nk}^2) - [E(z_{nk})]^2 \right\} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Обозначая через $F_{nk}(x)$ закон распределения случайной величины z_{nk} и применяя неравенство Шварца, имеем

$$I_1 = \left(\int_0^{\delta_n+0} x\, dF_{nk}(x)\right)^2 \leqslant P(z_{nk} > 0) \int_0^{\delta_n+0} x^2\, dF_{nk}(x),$$

$$I_2 = \left(\int_{-\delta_n-0}^{0} x\, dF_{nk}(x)\right)^2 \leqslant P(z_{nk} < 0) \int_{-\delta_n-0}^{0} x^2\, dF_{nk}(x)$$

и

$$[E(z_{nk})]^2 \leqslant \max(I_1, I_2) \leqslant \max\left\{ P(z_{nk} > 0), P(z_{nk} < 0) \right\} \cdot E(z_{nk}^2).$$

Но нетрудно видеть, что z_{nk} вместе с x_k имеют медианой 0. Поэтому

$$\max\left\{P(z_{nk} > 0),\ P(z_{nk} < 0)\right\} \leqslant \frac{1}{2}$$

и, значит,

$$[E(z_{nk})]^2 \leqslant \frac{1}{2} E(z_{nk}^2) \quad (1 \leqslant k \leqslant n,\ \ n = 1, 2, \ldots).$$

В соединении с (18) это и доказывает соотношение (19).

Из (19) следует, в частности, что

$$\delta_n = o\left\{ \sum_{k=1}^{n} D(z_{nk}) \right\} \quad (n \to \infty);$$

так как $|z_{nk}| \leqslant \delta_n$, то мы можем поэтому применить к последовательности серий $\{z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{nn}\}$ лемму 3. Получаем

$$L\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} z_{nk} - \sum_{k=1}^{n} E(z_{nk})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(z_{nk})}}\right\} \to G(x) \quad (n \to \infty). \tag{20}$$

Но тогда и

$$L\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k - \sqrt{A_n}\sum_{k=1}^{n} E(z_{nk})}{\sqrt{A_n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(z_{nk})}}\right\} \to G(x) \quad (n \to \infty), \tag{21}$$

ибо вероятность того, что выражения, стоящие в фигурных скобках в (20) и (21), различаются между собой, в силу (17) при $n \to \infty$ стремится к нулю. Но (21) означает, что для последовательности $\{x_k\}$ имеет место центральный предельный закон, с нормирующими коэффициентами

$$a_n = \sqrt{A_n \sum_{k=1}^{n} \left\{E(z_{nk}^2) - [E(z_{nk})]^2\right\}} \tag{22}$$

и центрирующими коэффициентами

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} E(z_{nk})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(z_{nk})}}\ ^{6}.$$

Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Сличение формул (13), (15), (19) и (22) показывает, что нормирующие коэффициенты a_n и A_n связаны следующими предельными соотношениями:

$$\frac{1}{2} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n^2}{A_n} \leqslant 1.$$

Что обе границы действительно достигаются, показывают уже следующие простые примеры.

Пример 1. Пусть все x_k взаимно независимы и распределены по следующему (одному и тому же для всех x_k) закону: x_k может принимать только значения 0 и 1, каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Очевидно, 0 является медианою x_k. Имеем $E(x_k) = \frac{1}{2}$, $D(x_k) = \frac{1}{4}$. Далее (см., например, лемму 3),

$$L\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}}\right\} = L\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} E(x_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(x_k)}}\right\} \to G(x) \quad (n \to \infty).$$

[6] Как нетрудно проверить, величины $\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}$ равномерно бесконечно малы по вероятности $[1 \leqslant k \leqslant n]$.

С другой стороны, $x_k^2 = x_k$ и в силу закона больших чисел (см., например, лемму 3′)

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{1}{\frac{1}{2}n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} E(x_k^2)} = 1.$$

Таким образом, здесь $a_n^2 = \frac{1}{4} n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n = \frac{1}{2} A_n$.

Пример 2. Пусть, в отличие от предыдущего случая, x_k принимает значения -1 и $+1$, каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. И здесь 0 является медианою x_k. Но $x_k^2 = 1$, т. е. является постоянной. Имеем

$$L\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k\right\} \to G(x) \quad (n \to \infty)$$

и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{n}{n} = 1,$$

так что a fortiori

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1.$$

Таким образом здесь $a_n^2 = n = A_n$[7].

§ 2

В теореме 1 не предполагалось существование у величин x_k каких бы то ни было моментов. Перейдем теперь к случаю, когда все x_k имеют конечные моменты второго порядка $E(x_k^2)$. Как известно, в этом случае проблема, разрешаемая центральным предельным законом, ставится несколько иначе, чем в общем случае, рассматривавшемся в теореме 1. Именно, центрируя величины x_k не медианами, а математическими ожиданиями, так чтобы было

$$E(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

коэффициентам a_n заранее предписывают значения

$$a_n = B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(x_k)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} E(x_k^2)}$$

и спрашивают, при каких условиях

$$L\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} x_k\right\} \to G(x) \ (n \to \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{prob} \frac{x_k}{B_n} = 0 \ [1 \leqslant k \leqslant n]. \qquad (23)$$

Соответственно этому в случае последовательности неотрицательных случайных величин $\{y_k\}$, имеющих конечные математические ожидания $E(y_k)$, проблема относительной устойчивости ставится так:

[7] Этот случай замечателен тем, что здесь последовательность $\{x_k^2\}$ состоит из равных между собой постоянных чисел, т. е. устойчива наиболее идеальным образом. Постоянство и совпадение величин x_k^2, как известно, не противоречит их взаимной независимости как случайных величин.

коэффициентам A_n заранее предписываются значения $A_n = \sum_{k=1}^{n} E(y_k)$ и спрашивается, при каких условиях

$$\lim_{n\to\infty} \text{prob} \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} E(y_k)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \text{prob} \frac{y_k}{\sum_{k=1}^{n} E(y_k)} = 0 \quad [1 \leqslant k \leqslant n]. \tag{24}$$

Соотношения (24) представляют собой наиболее естественную для рассматриваемого случая формулировку закона больших чисел.

Мы докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть случайные величины* x_k $(k=1, 2, \ldots)$ *имеют конечные моменты второго порядка* $E(x_k^2)$ *и математические ожидания* $E(x_k)=0$. *Для того чтобы последовательность* $\{x_k\}$ *подчинялась центральному предельному закону* (23), *необходимо и достаточно, чтобы последовательность квадратов* $\{y_k = x_k^2\}$ *подчинялась закону больших чисел* (24).

Доказательство. В силу указанного выше отличия в постановке проблемы теорема 2 не является следствием теоремы 1 и нуждается поэтому в специальном доказательстве, которое, впрочем, может быть проведено в основном по плану доказательства теоремы 1.

а) Необходимость. В первой части доказательства теоремы 1 условие центрированности величин x_k медианами использовалось лишь для перехода от (9) к (10). Теперь же мы получаем (10), с $a_n = B_n$, непосредственно из условий теоремы 1 и из леммы 1. Дальнейшие рассуждения повторяются дословно, и мы получаем соотношения (13) и (14). Для завершения доказательства необходимости остается показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2) \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{25}$$

Пусть $F_k(x)$ закон распределения величины x_k и $F_{nk}(x)$ закон распределения величины x_{nk}. В силу определения этой последней величины имеем

$$F_{nk}(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad x < -\varepsilon_n, \\ F_k(B_n x), & \text{когда} \quad |x| \leqslant \varepsilon_n, \\ 1, & \text{когда} \quad x > +\varepsilon_n. \end{cases}$$

Отсюда

$$E(x_{nk}^2) = \int_{|x|<\varepsilon_n} x^2\, dF_k(B_n x) + \varepsilon_n^2 P\left(\left|\frac{x_k}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon_n\right)$$
$$= \frac{1}{B_n^2} \int_{|x|<\varepsilon_n B_n} x^2\, dF_k(x) + \varepsilon_n^2 P\left(\left|\frac{x_k}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon_n\right)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}^2) = \frac{1}{B_n^2} \int_{|x|<\varepsilon_n B_n} x^2\, dF_k(x) + \varepsilon_n^2 \sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon_n\right)$$
$$\leqslant 1 + \varepsilon_n^2 \sum_{k=1}^{n} P\left(\left|\frac{x_k}{B_n}\right| \geqslant \varepsilon_n\right) \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{26}$$

В соединении с (13) это и дает соотношение (25).

б) Достаточность. Все сказанное в доказательстве достаточности условия теоремы 1 до установления соотношения (18) включительно мы можем повторить дословно. При этом в нашем случае A_n по предположению равно B_n^2, поэтому мы можем считать δ_n и z_{nk} совпадающими с ε_n и x_{nk}, о которых шла речь выше в доказательстве необходимости. Пользуясь соотношением (18), докажем теперь, что

$$\sum_{k=1}^{n} |E(x_{nk})| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{27}$$

Прежде всего в силу (17), (18) и (26) имеем

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon_n B_n} x^2 \, dF_k(x) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{28}$$

Поэтому, выбирая последовательность ε_n достаточно медленно стремящейся к нулю, на что мы имеем право, ибо при увеличении чисел ε_n все предельные соотношения выполняются a fortiori, мы можем добиться выполнения соотношения

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon_n B_n} x^2 \, dF_k(x) = o(\varepsilon_n) \quad (n \to \infty). \tag{29}$$

Теперь

$$E(x_{nk}) = \int_{|x| < \varepsilon_n} x \, dF_k(B_n x) + \varepsilon_n [1 - F_k(B_n \varepsilon_n - 0)] - \varepsilon_n F_k(-B_n \varepsilon_n + 0)$$

$$= \frac{1}{B_n} \int_{|x| < \varepsilon_n B_n} x \, dF_k(x) + \varepsilon_n [1 - F_k(B_n \varepsilon_n - 0) - F_k(-B_n \varepsilon_n + 0)],$$

или, так как по условию $E(x_k) = 0$,

$$E(x_{nk}) = -\frac{1}{B_n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon_n B_n} x \, dF_k(x) + \varepsilon_n [1 - F_k(B_n \varepsilon_n - 0) - F_k(-B_n \varepsilon_n + 0)].$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |E(x_{nk})| \leqslant \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon_n B_n} |x| \, dF_k(x) + \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} P\left(\left| \frac{x_k}{B_n} \right| \geqslant \varepsilon_n \right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_n B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \varepsilon_n B_n} x^2 \, dF_k(x) + \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} P\left(\left| \frac{x_k}{B_n} \right| \geqslant \varepsilon_n \right),$$

откуда в силу (17) и (29) и следует соотношение (27).

Из (27) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} [E(x_{nk})]^2 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

или в силу (18), что

$$\sum_{k=1}^{n} D(x_{nk}) \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Основываясь на этом, получаем тем же путем, что и в доказательстве теоремы 1, соотношение

$$L\left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} E(x_{nk}) \right\} \to G(x) \quad (n \to \infty).$$

Но в силу (27) вторая сумма в фигурных скобках стремится к нулю, следовательно

$$L\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} \to G(x) \quad (n\to\infty),$$

чем доказательство теоремы 2 и завершается.

§ 3

В начале статьи уже говорилось об аналогии между признаками для центрального предельного закона и признаками для относительной устойчивости. Чтобы обнаружить эту аналогию, достаточно сопоставить соответственные признаки для нижеследующих трех пар схем:

Необходимые и достаточные признаки

для центрального предельного закона

1а. Случайные величины x_k распределены по одному и тому же закону $F(x)$, центрированному медианой.

Признак Хинчина ([5]) — *П. Леви* ([8])

$$\int_{|x|\geqslant X} dF(x) = o\left(\frac{1}{X^2}\int_{|x|<X} x^2\, dF(x)\right)$$
$$(X\to\infty).$$

2а. Величины x_k центрированы медианами и имеют соответственно законы распределения $F_k(x)$.

Признак Феллера ([4])

Существует такая последовательность чисел $X_1, X_2, \ldots$, что при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|\geqslant X_n} dF_k(x)\to 0,$$

$$\frac{1}{X_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<X_n} x^2\, dF_k(x)\to\infty.$$

3а. Величины x_k имеют конечные вторые моменты $E(x_k^2)$ и центрированы математическими ожиданиями; в качестве нормирующих коэффициентов берутся

$$B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} E(x_k^2)}.$$

Признак Линдеберга ([10]) — *Феллера* ([3])

для любого $\tau > 0$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|<\tau B_n} x^2\, dF_k(x)\to 1 \quad (n\to\infty).$$

для относительной устойчивости

1б. Случайные величины y_k неотрицательны и распределены по одному и тому же закону $\Phi(x)$.

Признак Хинчина ([6])

$$\int_{x\geqslant Z} d\Phi(x) = o\left(\frac{1}{Z}\int_{x<Z} x\, d\Phi(x)\right)$$
$$(Z\to\infty).$$

2б. Величины y_k неотрицательны и имеют соответственно законы распределения $\Phi_k(x)$.

Признак Боброва ([1])

Существует такая последовательность чисел $Z_1, Z_2, \ldots$, что при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x\geqslant Z_n} d\Phi_k(x)\to\infty,$$

$$\frac{1}{Z_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{x<Z_n} x\, d\Phi_k(x)\to\infty.$$

3б. Величины y_k неотрицательны и имеют конечные математические ожидания $E(y_k)$; в качестве нормирующих коэффициентов берутся

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} E(y_k).$$

Признак Боброва ([2])

для любого $\tau > 0$

$$\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{x<\tau A_n} x\, d\Phi_k(x)\to 1 \quad (n\to\infty).$$

Вероятностный смысл аналогии между соответственными признаками становится очевидным, если связать величины y_k и x_k равенством $y_k = x_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ или, более обще, считать y_k и x_k^2 распределенными по одному и тому же закону $\Phi_k(x)$. Тогда

$$\Phi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x < 0, \\ F_k(\sqrt{x}) - F_k(-\sqrt{x}-0), & \text{когда } x > 0, \end{cases}$$

и, как нетрудно проверить, любое из соотношений в правом столбце переходит в соответствующее соотношение в левом, и обратно, причем в случаях 1—2 следует положить $Z = X^2$ [соответственно $Z_n = X_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$], в третьем же случае A_n и B_n^2 будут совпадать по самому своему определению.

Теперь, для любой последовательности взаимно независимых неотрицательных случайных величин $\{y_k\}$ существует последовательность взаимно независимых случайных величин $\{x_k\}$, центрированных медианами, такая, что x_k^2 распределены по тем же законам, что и соответственные y_k. Точно так же для любой последовательности взаимно независимых $\{x_k\}$, центрированных медианами, последовательность $\{y_k = x_k^2\}$ будет последовательностью взаимно независимых неотрицательных случайных величин. В силу теоремы 1 [соответственно теоремы 2] это показывает, что приведенные выше соответственные признаки просто эквивалентны, например признак Феллера 2а является следствием признака Боброва 2б, и обратно. Наоборот, если считать установленной какую-либо пару соответственных признаков, то, беря $y_k = x_k^2$, мы получим в качестве следствия из этих признаков соответствующую нашу теорему: либо теорему 1, либо теорему 2, либо частный случай теоремы 1 для равнораспределенных величин. Таким путем и были первоначально получены эти теоремы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
27.III.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бобров А. А., Об относительной устойчивости сумм положительных случайных величин, Доклады Ак. Наук СССР, т. 15, № 5, 239—240, 1937.

[2] Бобров А. А., Об относительной устойчивости сумм в одном частном случае, Математ. сб., т. 3 (45), вып. 4, 1938.

[3] Feller W., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathem. Zeitschr. Bd. 40, S. 521—559, 1935.

[4] Feller W., Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, II, Mathem. Zeitschr., Bd. 42, S. 301—312, 1937.

[5] Khintchine A., Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, v. 6, p. 378—393, 1935.

[6] Khintchine A., Su una legge dei grandi numeri generalizzata, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, v. 7, p. 365—377, 1936.

[7] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ 1938.

[8] Lévy P., Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires indépendantes ou enchaînées, Journal des Mathém. pures et appliquées, t. 14, p. 347—402, 1935.

[9] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

[10] Lindeberg J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathem. Zeitschr., Bd. 15, S. 211—225, 1922.

D. RAIKOV. ON A CONNECTION BETWEEN THE CENTRAL LIMIT-LAW OF THE THEORY OF PROBABILITY AND THE LAW OF GREAT NUMBERS

SUMMARY

The series of the mutually independant random variables $\{x_k\}$ depends on the central limit-law when there exist two series of numbers $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ $(a_n > 0,\ b_n \gtreqless 0,\ n = 1, 2, \dots)$ such that the distribution of the random variable $\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n$ for $n \to \infty$ tends to the normal one:

$$L\left\{\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k - b_n\right\} \to G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\,^1,$$

the separate summands $\frac{x_k}{a_n} - \frac{b_n}{n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ being uniformly infinitely small on probability:

The series of the mutually independant and non-negative random variables $\{y_k\}$ is called to be relatively stabil when there exists a series of the positive numbers $\{A_n\}$ such that $\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} y_k$ for $n \to \infty$ tends on probability to 1, the separate summands $\frac{y_k}{A_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ being uniformly infinitely small on probability.

In the case when all the variables x_k have finite second moments $E(x_k^2)$ the problem which is resolved by the central limit-law is stated somewhat different than in the general case treated above. Namely, supposing that $E(x_k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ we prescribe for the normalising coefficients a_n the values

$$a_n = B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} E(x_k^2)}$$

and ask under what conditions for $n \to \infty$

(I) $$L\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} \to G(x)$$

(I′) the separate summands $\frac{x_k}{B_n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ being uniformly infinitely small on probability?

Correspondingly, in the case of series of non-negative random variables $\{y_k\}$ having finite first moments $E(y_k)$ the problem of the relative stability is stated as following: under what conditions for $n \to \infty$

(II) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k-1}^{n} E(y_k)}$ tends on probability to 1,

[1] $L\{X\}$ denotes the distribution law of the random variable X.

(II′) the separate summands $\frac{y_k}{\sum_{k=1}^{n} E(y_k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ being uniformly infinitely small on probability?

The relative stability is the most natural general form of the law of great numbers for series of non-negative random variables.

In this paper the following two theorems are proved, which establish the reduction of the central limit-law to the law of great numbers:

THEOREM 1. *A necessary and sufficient condition that the series of mutually independant random variables* $\{x_k\}$ *which satisfy the condition*

$$P(x_k<0) \leqslant \frac{1}{2} \geqslant P(x_k > 0)^2$$

should depend on the central limit-law is that the series of the squares of these variables $\{x_k^2\}$ *should be relatively stabil.*

THEOREM 2. *Let the mutually independant random variables* x_k $(k=1, 2, \ldots)$ *have finite second moments* $E(x_k^2)$ *and the first moments* $E(x_k)=0$. *A necessary and sufficient condition that the series* $\{x_k\}$ *should depend on the central limit-law* (I)—(I′) *is that the series of the squares of these variables* $\{y_k = x_k^2\}$ *should be relatively stabil in the sense* (II)—(II′).

With the aid of these theorems it is further established the equivalence of the known corresponding necessary and sufficient conditions for the central limit-law on the one side and for the relative stability on the other side. Inversely, the comparison of these conditions gives a new prove of our theorems 1 and 2.

[2] $P(E)$ denotes the probability of the event E.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles | Отделение математических и естественных наук

А. М. ОБУХОВ

НОРМАЛЬНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ВЕКТОРОВ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье дается общая теория нормальной корреляции двух случайных векторов. Применение тензорных величин дает возможность обобщить на рассматриваемый случай известные корреляционные характеристики—коэффициент корреляции, уравнения регрессии и условные дисперсии. Использование, в качестве основного математического аппарата, матричного исчисления позволяет все выкладки представить наиболее компактно.

Заключительная «теорема о разложении» фактически сводит многомерную корреляцию к системе независимых одномерных корреляций.

ВВЕДЕНИЕ

Целый ряд прикладных наук пользуется при своих исследованиях понятием случайного вектора. Между тем статистика векторов разработана сравнительно слабо. Если в области теории распределения векторов имеются определенные результаты, то этого нельзя сказать о теории корреляции. Преследуя, главным образом, «метеорологические» цели (в метеорологии приходится иметь дело с ветром—случайным вектором), автор исследовал в настоящей статье случай нормальной корреляции двух случайных векторов.

Попытаемся сформулировать задачу теории корреляции в общем виде, для абстрактных случайных величин. Абстрактная случайная величина x определяется множеством значений $\mathfrak{M}$ и функцией распределения вероятностей на этом множестве

$$p(x \subset d\mathfrak{M}) = p(d\mathfrak{M}). \tag{1}$$

Вероятность представляет некоторую своеобразную м е р у, распределенную на множестве $\mathfrak{M}$. Мы не будем подробно останавливаться на аксиоматике случайных величин, укажем только, что класс «измеримых» подмножеств (для которых определена функция распределения (1)) является телом ([1]).

Пусть мы имеем систему двух коррелятивно связанных величин $x \subset \mathfrak{M}$, $y \subset \mathfrak{N}$. Связь между x и y считаем определенной, если задано распределение вероятностей комбинаций значений x, y.

Построим прямое произведение множеств $C=[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$—пространство комбинаций. По определению связь x, y задается распределением вероятностей в C — комбинационным распределением (²)

$$p(x \subset d\mathfrak{M},\ y \subset d\mathfrak{N}) = p(d\mathfrak{M},\ d\mathfrak{N}). \tag{2}$$

Распределения x и y выражаются через комбинационное распределение

$$p(d\mathfrak{M}) = p(d\mathfrak{M},\ \mathfrak{N}),$$
$$p(d\mathfrak{N}) = p(\mathfrak{M},\ d\mathfrak{N}).$$

Таким образом, корреляция двух случайных величин x, y формально определяется некоторой новой случайной величиной—комбинацией (x, y), «вектором» в C.

Но сводится ли задача теории корреляции к построению комбинационного распределения?

По нашему мнению теория корреляции имеет свои специфические задачи. Комбинационное распределение характеризует лишь факт сосуществования случайных величин; конечной же целью является исследование динамики связи—влияния одной величины на другую, исследование самой вероятностной природы связи. Взаимодействие случайных величин вполне отражается условными распределениями, которые легко вычисляются из комбинационного распределения. Что касается вероятностной природы связи, то это понятие нуждается в более точном определении.

Пусть мы имеем две корреляционные системы из двух случайных величин x, y и x', y':

$$x \subset \mathfrak{M},\quad y \subset \mathfrak{N},$$
$$x' \subset \mathfrak{M}',\quad y' \subset \mathfrak{N}'.$$

Назовем эти системы эквивалентными, если можно установить такие взаимно однозначные соответствия $x \longleftrightarrow x'$ и $y \longleftrightarrow y'$, определяющие отображение множеств

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}' \text{ и } \mathfrak{N} \longleftrightarrow \mathfrak{N}',$$

при которых значения функций комбинационного распределения от соответствующих подмножеств совпадают:

$$p(d\mathfrak{M},\ d\mathfrak{N}) = p'(d\mathfrak{M}',\ d\mathfrak{N}'). \tag{3}$$

Мы будем говорить также, что природа связи между x, y и x', y' одинакова.

Обращая данное определение, легко показать, что корреляционная система, образованная обратимыми функциями от x и y, эквивалентна первоначальной. Условно

$$(f(x),\ \psi(y)) \sim (x, y).$$

Понятие эквивалентности позволяет, таким образом, элиминировать функциональный момент связи, абстрагировать природу самой связи от природы изучаемых объектов. Совершенно очевидно, что оно подчиняется трем аксиомам эквивалентности: возвратности, симметрии и транзитивности. Поэтому, если задано некоторое множество

корреляционных систем, то, соединяя эквивалентные системы в один класс, можно разбить все множество на взаимно простые классы.

Задачей теории корреляции является разыскание таких свойств и признаков корреляционных систем, которые остаются инвариантными в пределах одного класса и для каждого класса являются характерными.

Рассмотрим в качестве примера совокупность всех нормальных корреляций двух скалярных величин.

Закон связи задается функциями комбинационного распределения:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)} dx\,dy. \tag{4}$$

Покажем, что *для эквивалентности двух систем необходимо и достаточно равенство абсолютных величин коэффициента корреляции.*

Каждая функция вполне определяется тремя параметрами:

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad r.$$

Если две системы (x, y) и (x', y') эквивалентны, то соответствие может быть только линейным (иначе изменился бы вид функции). Но при линейных образованиях $|r|$ остается инвариантным. Следовательно, для эквивалентных систем коэффициенты корреляции совпадают. Легко доказать и обратное: если $|r| = |r'|$, то системы эквивалентны,—устанавливая соответствие

$$\frac{x}{\sigma_x} \longleftrightarrow \frac{x'}{\sigma'_x}; \quad \frac{y}{\sigma_y} \longleftrightarrow \pm\frac{y'}{\sigma'_y} \quad \begin{pmatrix} + \text{ при } rr' > 0 \\ - \text{ при } rr' < 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом мы доказали, что при нормальной корреляции (для одномерного случая) *коэффициент корреляции полностью отражает стохастическую природу связи.* В более общем случае, к которому мы переходим (нормальная корреляция между многомерными объектами), стохастическая природа связи определяется системой чисел «корреляционных инвариантов». Основной задачей нашего исследования является разыскание всех корреляционных инвариантов и выяснение их вероятностного смысла.

1. Обобщение понятия математического ожидания

Для наших целей обычное понятие математического ожидания нуждается в некотором обобщении. Пусть x случайная величина, заданная на множестве $\mathfrak{M}$ функцией распределения $p(d\mathfrak{M})$; $\overline{F}(x)$ некоторая функция элементов $x \subset \mathfrak{M}$, определенная на линейном многообразии L s измерений, «измеримая» относительно $p(d\mathfrak{M})$. $\overline{F}$ — также, очевидно, случайная величина, определенная на L. Причем

$$p(dL) = p(\overline{F} \subset dL) = p(\Delta\mathfrak{M}),$$

где $\Delta\mathfrak{M}$ — множество прообразов $\overline{F}(x)$, принадлежащих dL:

$$\Delta\mathfrak{M} = \overline{F}^{-1}(dL).$$

Если $\Delta\mathfrak{M}$ пусто, то

$$p(dL) = 0.$$

Назовем математическим ожиданием $\overline{F}(x)$ интеграл

$$\text{М.О.}\,\overline{F}=\int^{L}\overline{F}\,p\,(dL), \tag{5}$$

или, заменяя переменное интегрирования, получаем эквивалентное определение

$$\text{М.О.}\,\overline{F}(x)=\int^{\mathfrak{M}}\overline{F}(x)\,p\,(d\,\mathfrak{M}). \tag{5a}$$

Последний интеграл понимается в смысле Лебега-Стильтьеса для векторной функции:

$$\int^{\mathfrak{M}}\overline{F}(x)\,p\,(d\,\mathfrak{M})=\lim_{D(\Delta L)\to 0}\sum^{\mathfrak{M}}\overline{F}_i\,p\,(\Delta\,\mathfrak{M}_i),$$

$$\overline{F}_i\subset\Delta L_i,\quad \Delta\mathfrak{M}_i=\overline{F}^{-1}(\Delta L_i),$$

$$\sum\Delta L_i=L,\quad \sum\Delta\,\mathfrak{M}_i=\mathfrak{M}.$$

Если $\mathfrak{M}$ само является линейным многообразием, то мы получим из (5a) определение математического ожидания случайного вектора, полагая $\overline{F}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$

$$\text{М.О.}\,\mathbf{x}=\int^{\mathfrak{M}}\mathbf{x}\,p\,(d\,\mathfrak{M}). \tag{6}$$

Понятие математического ожидания может быть обращено на случай функций нескольких случайных величин:

$$\text{М.О.}\,\overline{F}(x,y)=\int^{[\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}]}\overline{F}(x,y)\,p\,(d\,\mathfrak{M},d\,\mathfrak{N}). \tag{7}$$

Обобщение основных теорем сложения и умножения математических ожиданий не представляет никаких затруднений. Перечислим основные свойства М.О.:

1) $$\text{М.О.}\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\text{М.О.}\,\mathbf{x}+\text{М.О.}\,\mathbf{y}, \tag{8}$$

2) если A линейный оператор, определенный в пространстве конечного числа измерений, то

$$\text{М.О.}\,A\overline{F}(x)=A\,\text{М.О.}\,\overline{F}(x). \tag{9}$$

Отсюда следует, что для случайного вектора операция М.О. является аффинной.

Наконец, если x, y независимы

$$p\,(d\,\mathfrak{M},\,d\,\mathfrak{N})=p\,(d\,\mathfrak{M})\,p\,(d\,\mathfrak{N}),$$

то имеет место теорема умножения

$$\text{М.О.}\,[\overline{F}(x),\,\overline{G}(y)]=[\text{М.О.}\,\overline{F}(x),\,\text{М.О.}\,\overline{G}(y)]. \tag{10}$$

Умножение понимается в самом широком смысле — как некоторая двусторонне дистрибутивная операция, определенная на некотором линейном многообразии L'', вообще говоря, отличном от $L\supset\overline{F}$ и $L''\supset\overline{G}$.

Доказательство перечисленных свойств почти тривиально вытекает из линейности операции интегрирования.

Расширив, таким образом, понятие математического ожидания, мы будем им пользоваться в применении к векторам и тензорам любого ранга.

2. Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора

Переходим теперь к рассмотрению конкретных объектов — случайных векторов, заданных в n-мерном аффинном пространстве U_n. Для удобства выкладок мы будем считать, что в U_n определена некоторая фиксированная система координат (посредством базиса $\mathbf{e}_i$). Преобразование системы координат мы будем заменять эквивалентным преобразованием всего пространства относительно этой фиксированной системы. При такой точке зрения вектор эквивалентен системе из n чисел, а тензор второго ранга — квадратной матрице n-ого порядка.

Преобразование пространства

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}' \tag{11}$$

можно также интерпретировать как преобразование системы координат, если считать числа x_i' компонентами того же вектора $\mathbf{x}$, но в новой системе координат, единичные векторы которой представляются в старой системе вертикальными колонками матрицы T. Обе точки зрения эквивалентны. Все аналитические соотношения, допускающие геометрическую интерпретацию, должны быть инвариантны по отношению к любому неособенному преобразованию T.

Рассмотрим закон преобразования матриц, соответствующих ковариантному смешанному и контрвариантному тензору при преобразовании пространства (11).

В качестве контрвариантного тензора можно взять, например, диадное произведение двух векторов

$$\left.\begin{aligned} M &= \{\mathbf{x}\,\mathbf{y}\}, \quad & M' &= \{\mathbf{x}'\,\mathbf{y}'\}, \\ M &= TM'T^*, \quad & M' &= T^{-1}MT^{*-1} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Примером смешанного тензора может служить линейный оператор P

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y} = P\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}' = P'\mathbf{x}', \\ P' = T^{-1}PT. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В качестве ковариантного тензора рассмотрим ядро квадратичной формы A

$$(\mathbf{x}A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}'A'\mathbf{x}').$$

По известной теореме о преобразовании квадратичной формы имеем

$$A' = T^*AT. \tag{14}$$

Математическое ожидание случайного вектора, заданного в U_n, определяется согласно предыдущему (6). Так как в дальнейшем мы будем иметь дело только с непрерывным распределением на многообразиях конечного числа измерений, то для наших целей достаточно обычного многомерного интеграла Римана

$$\begin{aligned} \text{М.О.}\,\mathbf{x} &= \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\int \mathbf{x}\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \\ &= \int^{U_n} \mathbf{x}\,\varphi(\mathbf{x})\,du, \end{aligned} \tag{15}$$

где $du = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ элемент «объема», $\varphi(\mathbf{x})$ — функция плотности вероятности.

Каждую из компонент вектора $(\mathbf{x})_i = x_i$ можно рассматривать как самостоятельную случайную величину. Ее распределение получим, беря интеграл от

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

по всем переменным, кроме x_i. Таким образом случайный вектор можно трактовать как совокупность из n коррелятивно связанных случайных скалярных величин, поставленных в соответствие каждой системе координат и преобразующихся по определенному закону при переходе от одной системы к другой.

Из обобщенной теоремы сложения непосредственно следует, что i-тая компонента М.О. равна М.О. от i-той компоненты:

$$(\text{М.О. } \mathbf{x})_i = \text{М.О. } x_i,$$

так как

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i,$$

$$\text{М.О. } \mathbf{x} = \sum \text{М.О. } (x_i \mathbf{e}_i) = \sum (\text{М.О. } x_i)\, \mathbf{e}_i,$$

где $\mathbf{e}_i$ — постоянные векторы, которые можно выносить за знак М.О.

Совершенно аналогичное соотношение имеем для момента второго порядка от случайного вектора — тензора *. Последний определяется как

$$\text{М.О. } \{\mathbf{x}\mathbf{x}\} = \int^{U_n} \{\mathbf{x}^2\}\, \varphi(\mathbf{x})\, du.$$

Легко видеть, что

$$(\text{М.О. } \{\mathbf{x}\mathbf{x}\})_{ik} = \text{М.О. } (x_i x_k).$$

Разность

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \text{М.О. } \mathbf{x} \tag{16}$$

назовем уклонением вектора. Математическое ожидание квадрата уклонения (тензор) назовем дисперсией:

$$D(\mathbf{x}) = \text{М.О. } \{\boldsymbol{\xi}^2\} = \text{М.О. } \{(\mathbf{x} - \text{М.О. } \mathbf{x})^2\}. \tag{17}$$

Пользуясь тензорной алгеброй и обобщением теоремы сложения и умножения М.О., легко проверить следующие соотношения:

1) $$D(A\mathbf{x}) = A D(\mathbf{x}) A^*, \tag{18}$$

где A — постоянный оператор;

2) $$D(\mathbf{x}) = \text{М.О. } \{\mathbf{x}^2\} - \{(\text{М.О. } \mathbf{x})^2\}; \tag{19}$$

3) $$D(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = D(\mathbf{x}) + D(\mathbf{y}), \tag{20}$$

если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ независимы.

Введем понятие *вырождения* распределения случайного вектора.

Подобно тому как скалярная случайная величина может выродиться в «достоверную», если множество возможных значений состоит из одного

---

* Ср. Mises R. (3).

элемента *, в случае вектора мы имеем частичное и полное вырождение.

Если множество возможных значений случайного вектора состоит из одной точки, то мы будем иметь случай полного вырождения. Если множество возможных значений образует некоторое непрерывное многообразие $R_m \subset U_n$, число измерений которого $m < n$, мы будем иметь случай частичного вырождения; разность $n - m$ будем называть степенью вырождения.

Если R_m образует линейное многообразие, вырождение будем называть линейным. В дальнейшем мы будем иметь в виду только линейные вырождения.

Очевидно, что m равно максимальному числу линейно независимых возможных значений вектора.

Рассмотрим теперь некоторые свойства дисперсий. Для простоты предположим, что начало координат находится в центре распределения; тогда

$$\text{М.О.}\,\mathbf{x} = 0, \quad D(\mathbf{x}) = \text{М.О.}\left\{\mathbf{x}^2\right\}.$$

Из определения (17) непосредственно следует, что D — симметричный контрвариантный тензор. Докажем теперь, что ранг матрицы D равен максимальному числу независимых возможных значений вектора $\mathbf{x}$, т. е.

$$r = m. \tag{21}$$

Применим к пространству U_n ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \Omega\mathbf{x}, \\ D(\mathbf{x}') &= \Omega D \Omega^*. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

На основании известной теоремы о существовании ортогонального преобразования, приводящего симметрическую матрицу к диагональному виду, можем выбрать Ω такое, что

$$D' = \left\{\lambda_i \delta_{ik}\right\}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k, \end{cases}$$

где λ_i — главные значения тензора D. Так как

$$\lambda_i = \text{М.О.}\,(x_i' x_i') = \text{М.О.}\,x_i'^2,$$

то λ_i неотрицательны.

Так как ранг D' равен рангу D, то число отличных от нуля λ_i равно r.

Рассмотрим $(n - r)$ λ_i, равных нулю, и выразим x_i' через x_k:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} x_k, \quad \sum_k \omega_{ik}^2 = 1;$$

$$\lambda_i = \text{М.О.}\,x_i'^2 = \text{М.О.}\,(\sum_k \omega_{ik} x_k)^2 = 0 \quad (i = r + 1, \ldots, n).$$

---

* Точку $M \subset U_n$ мы считаем возможным значением случайного вектора, если вероятность нахождения $\mathbf{x}$ в любой сколь угодно малой окрестности M отлично от нуля. Для любого ε выполняется

$$p\,(0 \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{M}| < \varepsilon) > 0,$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{M}|$ — положительно определенный модуль вектора.

Так как математическое ожидание неотрицательной величины равно 0, то сама величина «почти достоверно»* равна нулю; таким образом мы имеем для возможных значений $n-r$ условий

$$\sum_k \omega_{ik} x_k = 0 \quad (i = r+1, \ldots, n).$$

Проводя аналогичные рассуждения, но в обратном порядке, можно показать, что между возможными значениями x_k не может быть больше чем $(n-r)$ независимых соотношений. Таким образом, значения компонент связаны $n-r$ точными соотношениями, т. е. множество возможных значений образует многообразие r измерений, что и требовалось доказать.

Если распределение не вырождено $(r=n)$, дисперсия является полным тензором. При полном вырождении $(r=0)$ дисперсия обращается в нуль.

Отметим также свойство диагональных элементов:

$$D_{ik}^2 \leqslant D_{ii} D_{kk}.$$

Это вытекает из свойств коэффициента корреляции

$$r^2(x_i, x_k) = \frac{D_{ik}^2}{D_{ii} D_{kk}} \leqslant 1,$$

которое доказывается на основании известного неравенства Шварца. Очевидно, при невырожденном распределении имеем строгое неравенство.

Дисперсия, как и всякий симметрический тензор в аффинном пространстве, может быть представлена геометрически некоторой эллиптической гиперповерхностью

$$\mathbf{x} D^{-1} \mathbf{x} = 1. \tag{22}$$

Эту поверхность по аналогии с трехмерным случаем будем называть «эллипсоидом дисперсии».

Рассмотрим теперь некоторые метрические свойства тензора дисперсии. Покажем связь между тензором дисперсии случайного вектора и скалярной дисперсией ортогональной проекции вектора на заданную ось, определенную ортом $\mathbf{n}$

$$D(\mathbf{xn}) = \mathbf{n} D(\mathbf{x}) \mathbf{n}. \tag{23}$$

Это свойство доказывается на основании тождества

$$(\mathbf{xn})^2 = (\mathbf{n} \{\mathbf{x}^2\} \mathbf{n})$$

путем образования М.О. от правой и левой части. Если $\mathbf{n}$ совпадает с главным направлением, то

$$D\mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i,$$

$$D(\mathbf{xn}_i) = \mathbf{n}_i D \mathbf{n}_i = \lambda_i, \tag{24}$$

т. е. главные значения дисперсии являются дисперсиями проекций случайного вектора на главные оси. Легко видеть, что $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$ является полуосями эллипсоида дисперсии (22).

---

* С вероятностью, равной единице.

3. Нормальное распределение

Перейдем теперь к рассмотрению нормального распределения случайного вектора в U_n. Покажем, как параметры функции распределения выражаются через $D(\mathbf{x})$ и М.О. $(\mathbf{x})$. Пусть мы имеем в U_n нормальное невырожденное распределение вектора $\mathbf{x}$, причем начало координат находится в центре распределения (М.О. $\mathbf{x}=0$); тогда по определению функция распределения имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = Ce^{-\frac{1}{2}\sum a_{ik}x_i x_k}, \tag{25}$$

причем

$$\int\limits^{U_n} \varphi(\mathbf{x})\, du = 1. \tag{26}$$

Пользуясь символом скалярного произведения, можно квадратичную форму (25) записать в виде

$$\sum a_{ik}x_i x_k = \mathbf{x}A\mathbf{x},$$
$$A = A^*,$$

где A—полный тензор и, кроме того, все его главные значения положительны. Это вытекает из существования интеграла (26), для чего необходима определенность квадратичной формы $(\mathbf{x}A\mathbf{x})$.

Докажем теперь, что

$$D = A^{-1}. \tag{27}$$

Произведем некоторое преобразование пространства (11)

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'.$$

Тогда согласно (18)

$$D' = T^{-1}DT^{*-1}.$$

Матрица A, являясь ядром квадратичной формы, преобразуется по закону

$$A' = T^*AT.$$

Пусть T выбрано так, что $A' = E$. Это возможно, так как $\mathbf{x}A\mathbf{x}$ всегда положительно. Вычислим при этом предположении D':

$$\varphi'(\mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i'^2} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i'^2},$$

$$D'_{ik} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int x'_i x'_k \left(\prod_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_r^2}\right) dx'_1 \ldots dx'_n = \delta_{ik} \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k, \end{cases}$$

откуда

$$D' = E, \quad A'D' = E.$$

Переходя теперь обратно от A' и D' к A и D, получаем искомый результат.

Покажем теперь, что постоянный множитель в общем случае равен

$$C=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|D|^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

Имеем по условию нормированности (26)

$$C\int\limits^{U_n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}A\mathbf{x})}\,du=1.$$

Преобразуем переменные так, чтобы

$$A'=E.$$

Якобианом преобразования $\mathbf{x}=T\mathbf{x}'$ является $|T|$, удовлетворяющее соотношению

$$|T|^2|A|=1,$$

так как по предположению

$$A'=T^*AT=E.$$

Откуда*

$$|T|=\sqrt{|A|^{-1}}=\sqrt{|D|},$$

$$C\int\limits^{U_n} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}A\mathbf{x})}\,du=C\sqrt{|D|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int e^{-\frac{1}{2}\sum x_i'^2}\,dx_1'\ldots dx_n'=1,$$

$$C=\frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}\,(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Следовательно, окончательное выражение функции распределения случайного вектора имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|D|^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}D^{-1}\mathbf{x})}, \tag{29}$$

причем начало координат предполагается в центре распределения.

Если начало координат находится в некоторой произвольной точке, то функция нормального распределения имеет следующий вид:

$$\varphi(\mathbf{x})=e^{-\frac{1}{2}\left(\sum a_{ik}x_ix_k+2\sum b_ix_i+\gamma\right)}. \tag{30}$$

Заметим, что в показателе стоит полином второй степени относительно n переменных. Последнее свойство мы принимаем за определение нормального распределения.

Пользуясь векторными обозначениями, перепишем (30) в виде

$$\varphi(\mathbf{x})=e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}A\mathbf{x}+2\dot{\mathbf{b}}\mathbf{x}+\gamma)}, \tag{31}$$

где $\dot{\mathbf{b}}$ — ковариантный вектор, γ — некоторый скаляр. Квадратичная форма $\mathbf{x}A\mathbf{x}$ должна быть положительна, так как именно она определяет знак показателя при достаточно больших значениях компонент $\mathbf{x}$.

---

* Исходя из выражения для $C=\dfrac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, можно вывести соотношение (27), дифференцируя по параметру a_{ik} тождество (26). Это доказательство обычно приводится в курсах теории вероятностей.

Перенесем начало координат в некоторую точку $\mathbf{a}$, полагая

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi}.$$

Тогда

$$\mathbf{x}A\mathbf{x} + 2\dot{\mathbf{b}}\mathbf{x} + \gamma = (\boldsymbol{\xi}A\boldsymbol{\xi}) + 2(\dot{\mathbf{b}} + A\mathbf{a})\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{a}A\mathbf{a} + 2\dot{\mathbf{b}}\mathbf{a} + \gamma),$$

так как

$$A^* = A.$$

Положим теперь

$$\mathbf{a} = -A^{-1}\dot{\mathbf{b}}. \tag{32}$$

Тогда члены, содержащие первые степени, исчезнут. Окончательно имеем

$$\varphi(\mathbf{x}) = Ce^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})A(\mathbf{x}-\mathbf{a})} \tag{33}$$

Последнее выражение, симметричное относительно $(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, согласно предыдущему определяет распределение $\boldsymbol{\xi}$ относительно центра, т. е.

$$\text{M.O.}\,\boldsymbol{\xi} = \text{M.O.}\,(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0.$$

Следовательно,

$$\text{M.O.}\,\mathbf{x} = \mathbf{a} = -A^{-1}\dot{\mathbf{b}}. \tag{34}$$

На основании (27) и (34), соотношение (33) можно переписать в виде:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,|D|^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\text{M.O.}\,\mathbf{x})D^{-1}(\mathbf{x}-\text{M.O.}\,\mathbf{x})}\,du. \tag{35}$$

По доказанному математическое ожидание и дисперсия вполне определяют функцию распределения случайного вектора, если только распределение не вырождено.

При нормальном, но вырожденном распределении мы должны выделить сначала многообразие возможных значений $U_m \subset U_n$ и построить функцию распределения на этом многообразии (относительно U_m распределение не будет уже вырождено) *. Так как ранг D равен m, то всегда можно найти такое неособенное преобразование, что

$$D' = \begin{Bmatrix} D_m & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

где главный минор $|D_m|$ отличен от нуля, а прочие элементы матрицы — нули. Тогда первые m ортов определяют искомое многообразие U_m, а матрица D_m, являясь полным тензором в U_m, определяет распределение.

Примером такого вырождения может служить вырождение пространственного распределения в плоское, причем объемную плотность вероятности приходится заменять поверхностной.

* Изложенное представляет по существу определение нормального вырожденного распределения.

4. Корреляция случайных векторов

Рассмотрим теперь случай системы из двух коррелятивно связанных случайных векторов **x** и **y**. Предположим, что **x** и **y** заданы в пространствах

$$\mathbf{x} \subset U_n, \quad \mathbf{y} \subset V_n.$$

Корреляция между двумя величинами вполне определяется заданием комбинационного распределения — вероятностей комбинаций $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Множество всех комбинаций значений **x** и **y** мы назовем пространством комбинаций C. Последнее можно интерпретировать как многообразие $2n$ измерений, построенное на базисе U_n, V_n. Элементами этого многообразия будут векторы $2n$ измерений — «прямые суммы» векторов **x** и **y**, которые мы будем обозначать символом

$$\mathbf{x} \bigcirc \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Таким образом, исследование корреляции формально сводится к изучению распределения вероятности в C_{2n}. Если это распределение нормально, то корреляцию также будем называть нормальной. Этот, практически наиболее важный случай мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Отметим принципиальное различие между, с одной стороны, фиктивным C_{2n} и U_n или V_n — с другой. В то время как с U_n и V_n связана группа любых аффинных (и соответственно ортогональных, если введена метрика) преобразований, в C_{2n} допустима только группа преобразований, удовлетворяющая требованию корреляционной эквивалентности — при отображениях $C_{2n} \longleftrightarrow C_{2n}$; U_n и V_n должны отображаться сами на себя.

Аналитически эти преобразования представляются квазидиагональными матрицами вида

$$\begin{Bmatrix} T & 0 \\ 0 & Q \end{Bmatrix}. \tag{36}$$

Это различие обусловливает своеобразие проблемы теории корреляции, ее отличие от задач теории распределения в многомерных пространствах.

Задача теории нормальной корреляции состоит в разыскании таких соотношений между параметрами комбинационного распределения, которые инвариантны относительно группы квазидиагональных преобразований (36).

В пространстве C_{2n} нам придется иметь дело с матрицами $2n$ измерений, которые можно рассматривать как составленные из четырех n-мерных матриц

$$M_{2n} = \begin{Bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{Bmatrix}.$$

Такие матрицы мы будем называть составными.

Как известно, составные матрицы обладают многими свойствами обыкновенных числовых матриц:

1)
$$\begin{Bmatrix} A & B \\ C & D \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{Bmatrix};$$

2) самосопряженная матрица имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} A^* = A \\ C^* = C \end{matrix};$$

3) произведение двух составных матриц представляется в виде

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}, & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}, & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{Bmatrix}.$$

Эти свойства легко доказываются, если представить элементы составной матрицы матрицами n-ого порядка в развернутом виде и произвести указанные операции.

Найдем обратную матрицу для симметричной составной матрицы. Так как решение будет также симметричным, то искомую матрицу можно записать в виде

$$\begin{Bmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{Bmatrix}$$

и задача сводится к решению матричного уравнения

$$\begin{Bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X & Y \\ Y^* & Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{Bmatrix}.$$

Решая элементарными методами систему уравнений для соответствующих матричных компонент, получаем:

$$X = (A - BC^{-1}B^*)^{-1}, \quad Y = (B^* - CB^{-1}A)^{-1}, \quad Z = (C - B^*A^{-1}B)^{-1},$$

откуда

$$\begin{Bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} (A - BC^{-1}B^*)^{-1} & (B^* - CB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AB^{*-1}C)^{-1} & (C - B^*AB)^{-1} \end{Bmatrix}. \qquad (37)$$

В качестве примера составной матрицы приведем диадный квадрат «прямой суммы» двух векторов

$$\{(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})^2\} = \begin{Bmatrix} \{\mathrm{x}^2\} & \{\mathrm{xy}\} \\ \{\mathrm{yx}\} & \{\mathrm{y}^2\} \end{Bmatrix}.$$

Все свойства математических ожиданий, сформулированные выше, справедливы, разумеется, и для C_{2n}.

Определим «дисперсию» составного вектора, предполагая для простоты, что М.О. $\mathrm{x} = 0$ и М.О. $\mathrm{y} = 0$:

$$D(\mathrm{x} \circ \mathrm{y}) = \text{М.О.}\, \{(\mathrm{x} \circ \mathrm{y})^2\} = \text{М.О.} \begin{Bmatrix} \{\mathrm{x}^2\} & \{\mathrm{xy}\} \\ \{\mathrm{yx}\} & \{\mathrm{y}^2\} \end{Bmatrix}.$$

Так как

$$(\text{М.О.}\, A)_{pq} = \text{М.О.}\, (A_{pq}),$$

то

$$D(\mathrm{x} \circ \mathrm{y}) = \begin{Bmatrix} D(\mathrm{x}) & M \\ M^* & D(\mathrm{y}) \end{Bmatrix}, \qquad (38)$$

где $D(\mathrm{x})$ и $D(\mathrm{y})$—знакомые уже нам дисперсии x и y, $M =$ М.О. $\{\mathrm{xy}\}$— так называемый комбинационный момент.

Произведем теперь преобразование пространств U_n, V_n:

$$\mathrm{x} = T\mathrm{x}', \quad \mathrm{y} = Q\mathrm{y}'.$$

Это — эквивалентно преобразованию C_{2n} с помощью квазидиагональной матрицы (36). Тогда согласно (18) имеем

$$D' = D(\mathrm{x}' \bigcirc \mathrm{y}') = \begin{Bmatrix} T & 0 \\ 0 & Q \end{Bmatrix}^{-1} D \begin{Bmatrix} T & 0 \\ 0 & Q \end{Bmatrix}^{*-1}$$

$$= \begin{Bmatrix} T^{-1}D_1T^{*-1} & T^{-1}MQ^{*-1} \\ Q^{-1}M^*T^{*-1} & Q^{-1}D_2Q^{*-1} \end{Bmatrix}, \tag{39}$$

$$D = D(\mathrm{x} \bigcirc \mathrm{y}), \quad D_1 = D(\mathrm{x}), \quad D_2 = D(\mathrm{y}).$$

Тот же результат мы получили бы, преобразуя отдельно каждый элемент составной матрицы D, исходя из их определения.

После этих предварительных замечаний переходим к исследованию нормального комбинационного распределения (нормальной корреляции). Не нарушая общности, можно положить

$$\text{М.О.}\,\mathrm{x} = 0, \quad \text{М.О.}\,\mathrm{y} = 0$$

(начало координат помещено в центре распределения); в этом случае в функции комбинационного распределения будут отсутствовать члены первой степени. Распределения x и y предполагаются невырожденными:

$$|D_1| \neq 0; \quad |D_2| \neq 0.$$

Кроме того, мы сначала исключим случай вырожденной корреляции *. При этих предположениях между компонентами $\mathrm{x} \bigcirc \mathrm{y}$ не может существовать функциональных линейных зависимостей, так как в противном случае мы имели бы вырожденную корреляцию. Следовательно,

$$|D| = |D(\mathrm{x} \bigcirc \mathrm{y})| = \begin{vmatrix} D_1 & M \\ M^* & D_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и распределение в пространстве комбинаций C_{2n} (комбинационное распределение) может быть представлено гауссовой функцией:

$$p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = C e^{-\frac{1}{2} K(\mathrm{x}, \mathrm{y})} du\, dv,$$

где $K(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ — квадратичная форма компонент $\mathrm{x} \bigcirc \mathrm{y}$.

Согласно (27) ядро $K(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

$$K = D^{-1}, \tag{40}$$

где

$$D = \begin{Bmatrix} D_1 & M \\ M^* & D_2 \end{Bmatrix}.$$

---

* Корреляция называется вырождающейся, если существуют такие линейные формы компонент **x** и **y** — $\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{v}}\mathbf{y}$, что вероятность неравенства $(\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x}) \neq (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{y})$ равна нулю

$$p(\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x} \neq \dot{\mathbf{v}}\mathbf{y}) = 0.$$

Число линейно независимых форм, обладающих этим свойством, будем называть степенью вырождения.

Представим K в форме составной матрицы:

$$K=\begin{Bmatrix} F & G \\ G^* & H \end{Bmatrix}$$

и частично развернем $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y})=(\mathbf{x} \bigcirc \mathbf{y})\begin{Bmatrix} F & G \\ G^* & H \end{Bmatrix}(\mathbf{x} \bigcirc \mathbf{y})$$

$$=\mathbf{x} F \mathbf{x}+2 \mathbf{x} G \mathbf{y}+\mathbf{y} H \mathbf{y}. \tag{41}$$

Мы получили сумму квадратичных и билинейных форм. Подставляя (41) в выражение для $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, имеем

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\frac{1}{(2\pi)^n |D|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} F \mathbf{x}+2 \mathbf{x} G \mathbf{y}+\mathbf{y} H \mathbf{y})} du\, dv, \tag{42}$$

где

$$|D|=\begin{vmatrix} F & G \\ G^* & H \end{vmatrix}^{-1}.$$

Полученная форма функции комбинационного распределения представляется наиболее удобной при дальнейших выкладках.

5. Условные распределения

По теореме умножения вероятностей,

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y})=p(\mathbf{x}) \cdot p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=p_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{y}),$$

откуда

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=\frac{1}{p(\mathbf{x})} \cdot p'(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{43}$$

Условное распределение отличается от комбинационного только на постоянный (относительно рассматриваемой переменной) множитель, в данном случае на $\frac{1}{p(\mathbf{x})}$.

Фиксируя в (42) некоторое значение $\mathbf{x}$, получаем выражение для условного распределения $\mathbf{y}$ с точностью до постоянного множителя

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=C'(\mathbf{x})\, C\, e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} F \mathbf{x}+2 \mathbf{x} G \mathbf{y}+\mathbf{y} H \mathbf{y})} dv. \tag{44}$$

Легко видеть, что распределение относительно $\mathbf{y}$ нормально. Определим его дисперсию $\Delta(\mathbf{y})$ (назовем ее условной дисперсией) и математическое ожидание (условное математическое ожидание), преобразуя показатель согласно (32) (роль вектора $\mathfrak{b}$ играет $G^* \mathbf{x}$):

$$\Delta(\mathbf{y})=H^{-1}, \tag{45}$$

$$\text{М.О.}_{\mathbf{x}}\, \mathbf{y}=-H^{-1} G^* \mathbf{x}=P_{21} \mathbf{x}, \tag{46}$$

где

$$P_{21}=-H^{-1} G^*. \tag{47}$$

Зная математическое ожидание и дисперсию, можно написать точное выражение условного распределения:

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=C_2' e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-P_{21} \mathbf{x}) H(\mathbf{y}-P_{21} \mathbf{x})} dv, \tag{48}$$

где

$$C'_2 = \frac{|H|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Delta|^{\frac{1}{2}}}.$$

Дисперсия y при условном распределении оказывается постоянной, условное М.О. — линейной векторфункцией x. Эту функцию мы будем называть уравнением регрессии.

Пользуясь полученным выражением для условного распределения (48), легко получить основное распределение x на основании (43). Для этого преобразуем показатель K(x, y), представив y в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{y} + H^{-1}G^*\mathbf{x} - H^{-1}G^*\mathbf{x} = (\mathbf{y} - P_{21}\mathbf{x}) - H^{-1}G^*\mathbf{x},$$

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(F - GH^{-1}G^*)\mathbf{x} + (\mathbf{y} - P_{21}\mathbf{x}) H (\mathbf{y} - P_{12}\mathbf{x}),$$

так как

$$H^* = H.$$

Подставляя полученное выражение в (42), имеем:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}(F - GH^{-1}G^*)\mathbf{x}} du\, C'_2 e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - P_{21}\mathbf{x}) H (\mathbf{y} - P_{21}\mathbf{x})} dv, \tag{49}$$

где

$$C = C_1 C'_2.$$

Так как второй множитель (49) есть не что иное, как $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, то для основного распределения $p(\mathbf{x})$ получаем

$$p(\mathbf{x}) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}(F - GH^{-1}G^*)\mathbf{x}} du. \tag{50}$$

Следовательно,

$$D(\mathbf{x}) = (F - GH^{-1}G^*)^{-1}, \tag{51}$$

$$C_1 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|D(x)|}} = \frac{\sqrt{|F - GHG^*|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Соотношение (51) может быть получено также чисто алгебраически на основании соотношения (40)

$$\begin{Bmatrix} D(\mathbf{x}) & M \\ M^* & D(\mathbf{y}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F & G \\ G^* & H \end{Bmatrix}^{-1}$$

путем применения к правой части формулы обращения составной матрицы (37).

Сравнивая постоянные коэффициенты C, C_1, C'_2, получаем любопытное выражение для детерминанта составной матрицы. Так как

$$C = C_1 C'_2,$$

то

$$\frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|D|}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|D_1|}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\Delta_2}}; \quad \Delta_2 = \Delta(\mathbf{y}),$$

откуда

$$|D| = |D_1| \, |\Delta_2|,$$

$$|D^{-1}| = |D_1^{-1}| \, |\Delta_2^{-1}|,$$

$$\begin{vmatrix} F & G \\ G^* & H \end{vmatrix} = |F - GH^{-1}G^*| \, |H| = |FH - GH^{-1}G^*H|. \tag{52}$$

Было бы интересно найти чисто алгебраическое доказательство этого соотношения.

Совершенно аналогичным способом можно определить условное распределение для x и основное для y. Так как x и y входят в $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вполне равноправно, то формулы, справедливые для x, переходят в формулы для y и обратно, если произвести подстановку

$$F \longleftrightarrow H; \quad G \longleftrightarrow G^*.$$

Пользуясь этим, получаем:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_1' e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-P_{12}\mathbf{y})F(\mathbf{x}-P_{12}\mathbf{y})} du \, C_2 e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}(H-G^*F^{-1}G)\mathbf{y}} dv, \tag{49a}$$

$$p(\mathbf{y}) = C_2 e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}(H-G^*F^{-1}G)\mathbf{y}} dv, \tag{50a}$$

$$D_2(\mathbf{y}) = (H - G^*F^{-1}G)^{-1}. \tag{51a}$$

Условное распределение

$$p_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = C_1 e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-P_{12}\mathbf{y})F(\mathbf{x}-P_{12}\mathbf{y})} du, \tag{48a}$$

где

$$P_{12}\mathbf{y} = \text{M.O.}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = -F^{-1}G\mathbf{y} \tag{46a}$$

уравнение регрессии y на x; условная дисперсия

$$\Delta(\mathbf{x}) = \Delta_1 = F^{-1}. \tag{45a}$$

Пользуясь связью между коэффициентами C и C_1', C_2, на основании (49a) получаем вторую формулу для детерминанта составной матрицы:

$$\begin{vmatrix} F & G \\ G^* & H \end{vmatrix} = |FH - FG^*F^{-1}G|. \tag{53}$$

В приведенных выше рассуждениях мы существенно пользовались существованием D_1^{-1}, D_2^{-1}, Δ_1^{-1}, Δ_2^{-1}. Последнее вытекает из наших предположений:

1) распределение x и y в U_n и V_n не вырождено

$$|D_1| \neq 0, \quad |D_2| \neq 0;$$

2) корреляция между x и y не вырождена.

Действительно, если бы Δ_1 или Δ_2 были особенными (например $|\Delta_1| = 0$), это означало бы, что многообразие возможных значений при условном распределении имеет меньше измерений, чем n, т. е. мы имели бы частично вырожденную корреляцию.

6. Тензоры корреляции

Определим теперь некоторые новые величины, характеризующие корреляцию между x и y, аналогичные коэффициенту корреляции.

Назовем квадратом тензора корреляции в U_n произведение отображений регрессии

$$R_1^2 = P_{12}P_{21}, \tag{54}$$

которое представляет некоторое отображение U_n само на себя

$$\mathbf{x}' = P_{12}\mathbf{y} = P_{12}P_{21}\mathbf{x} = R_1^2\mathbf{x}$$

и определяет, таким образом, смешанный тензор. Аналогично определяем тензор корреляции в V_n

$$R_2^2 = P_{21}P_{12}, \tag{54a}$$

R_2^2 осуществляет отображение V_n.

Подставляя вместо P_{12} и P_{21} их соответствующие выражения, получаем:

$$R_1^2 = F^{-1}GH^{-1}G^*, \tag{55}$$

$$R_2^2 = H^{-1}G^*F^{-1}G. \tag{55a}$$

Наличие двух тензоров корреляции объясняется тем, что один и тот же факт — связь между x и y — характеризуется с различных точек зрения: R_1 дает оценку в системе координат U_n, R_2 — в системе V_n. Как мы покажем ниже, матрицы R_1^2 и R_2^2 эквивалентны и, следовательно, инварианты их совпадают.

Таким образом, мы определили квадрат тензора корреляции. Самый тензор корреляции можно определить как одно из значений квадратного корня из соответствующей матрицы, имеющее все характеристические числа положительными. Последнее условие устраняет неудобство, связанное с многозначностью операции извлечения квадратного корня из матрицы.

Выведем важное соотношение, связывающее R_1^2 с Δ_1 и D_1. Имеем

$$R_1^2 = F^{-1}GH^{-1}G^*, \tag{55}$$

$$\Delta_1 = F^{-1}, \tag{45a}$$

$$D_1 = (F - GH^{-1}G^*)^{-1}, \tag{51}$$

откуда

$$E - \Delta_1 D_1^{-1} = E - F^{-1}(F - GH^{-1}G^*) = R_1^2. \tag{56}$$

Аналогично — соотношение для R_2^2:

$$R_2^2 = E - \Delta_2 D_2^{-1}. \tag{56a}$$

Мы получили, таким образом, формулы, заменяющие в случае векторных переменных известное равенство для скалярных случайных величин

$$r^2 = 1 - \frac{\delta^2}{\sigma^2}.$$

7. Свойства уклонений

Сконструируем новую величину:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - P_{12}\mathbf{y}. \tag{57}$$

$\boldsymbol{\xi}$, очевидно, представляет случайный вектор в U_n. Назовем его «уклонением» $\mathbf{x}$ от уравнения регрессии. Аналогично уклонением $\mathbf{y}$ назовем вектор

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - P_{21}\mathbf{x}. \tag{57a}$$

Очевидно,

$$\eta \subset V_n.$$

Покажем, что $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ стохастически независимы. Так как задание системы $\boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{y}$ эквивалентно заданию $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то

$$p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

откуда легко получить выражение для функции комбинационного распределения $p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y})$, подставив в правую часть $\mathbf{x} = P_{12}\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi}$ и произведя соответствующие алгебраические преобразования. В силу (49) имеем

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) = C_1' e^{-\frac{1}{2}(\xi \overset{-1}{\Delta_1} \xi)}\, du\, C_2 e^{-\frac{1}{2}(y \overset{-1}{D_2} y)}\, dv. \tag{58}$$

Так как второй множитель представляет $p(\mathbf{y})$, то первый множитель, не содержащий $\mathbf{y}$, тождественен с $p(\boldsymbol{\xi})$. Следовательно,

$$p(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\xi})\, p(\mathbf{y}), \tag{59}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается независимость $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\eta}$:

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = p(\boldsymbol{\eta})\, p(\mathbf{x}). \tag{59a}$$

Отметим, что

$$D(\boldsymbol{\xi}) = \Delta(\mathbf{x}), \tag{60}$$

$$D(\boldsymbol{\eta}) = \Delta(\mathbf{y}). \tag{60a}$$

Линейность уравнений регрессии и доказанные свойства уклонений являются характерными особенностями нормальной корреляции и могли бы служить определением последней. Здесь имеет место следующая теорема:

Если для двух коррелятивно связанных случайных векторов $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *существуют такие векторфункции* $A\mathbf{y}$ *и* $B\mathbf{x}$, *что*

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - A\mathbf{y} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - B\mathbf{x}$$

не зависят соответственно от $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{x}$, *причем*

$$|AB| \neq 0 \quad \text{и} \quad |E - AB| \neq 0,$$

то корреляция между $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *нормальна**.

---

* Легко показать, что A и B могут быть только отображениями регрессии. Так как ξ, $\mathbf{y}$ независимы, то

$$\text{М.О.}_{\mathbf{y}}(\xi) = \text{М.О.}(\xi) = 0,$$

$$\text{М.О.}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x} - A\mathbf{y}) = \text{М.О.}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) - A\mathbf{y} = 0,$$

$$A = P_{12}.$$

Доказательство теоремы аналогично данному для одномерного случая С. Н. Бернштейном. Последнее без труда переносится на случай вектора применением тензорных обозначений.

Основываясь на линейности уравнений регрессии и свойствах уклонений ξ, η при нормальной корреляции, можно получить непосредственно явное выражение R, Δ, P через параметры распределения

$$D_1, M, D_2.$$

Последнее особенно важно для исследования вырождающейся корреляции, так как в этом случае F, G, H вообще не существуют.

По доказанному ранее уклонения от уравнений регрессии удовлетворяют условиям (59), (59а). Применяя к произведению $\{\xi, y\}$ теорему умножения математических ожиданий, имеем

$$\text{M.O.}\{(x - P_{12}y)\,y\} = \{\text{M.O.}\,(x - P_{12}y)\,\text{M.O.}\,y\} = 0.$$

С другой стороны,

$$\text{M.O.}\{(x - P_{12}y)\,y\} = M - P_{12}D_2 = 0,$$

откуда

$$P_{12} = MD_2^{-1}. \tag{61}$$

Аналогично

$$P_{21} = M^* D_1^{-1}. \tag{61a}$$

Тензоры корреляции согласно (54), (54а) выразятся так:

$$R_1^2 = MD_2^{-1}M^*D_1^{-1}, \tag{62}$$

$$R_2^2 = M^*D_1^{-1}MD_2^{-1}. \tag{62a}$$

Определим условные дисперсии на основании (60) и (60а):

$$\Delta_1 = \text{M.O.}\,\{\xi^2\} = \text{M.O.}\,\{x - P_{12}y, \xi\} = \text{M.O.}\,\{x\,\xi\},$$

$$\Delta_1 = \text{M.O.}\,\{x^2\} - \text{M.O.}\,\{x\,P_{12}\,y\} = D_1 - MD_2^{-1}M^*. \tag{63}$$

Аналогично

$$\Delta_2 = D_2 - M^*D_1^{-1}M. \tag{63a}$$

Из сравнения (62) и (63) следует:

$$\Delta_1 = (E - R_1^2)\,D_1, \tag{56}$$

$$\Delta_2 = (E - R_2^2)\,D_2. \tag{56a}$$

Эти соотношения мы уже имели (стр. 356). Отметим, что выражения (61) — (63а) всегда имеют смысл, так как по предположению дисперсии не вырождаются.

Сопоставляя полученные формулы (61), (61а), (63), (63а) с выведенными ранее (46а), (47), (45а), (45), для тех же величин можно исключить из полученной системы уравнений $P_{12}, P_{21}, \Delta_1, \Delta_2$ и выразить F, G, G^*, H через D_1, M, M^*, D_2:

$$F = (D_1 - MD_2^{-1}M^*)^{-1}, \qquad G = (M^* - D_2M^{-1}D_1)^{-1},$$

$$G^* = (M - D_1M^{*-1}D_2)^{-1}, \qquad H = (D_2 - M^*D_1^{-1}M)^{-1}.$$

Тот же результат мы могли бы получить чисто алгебраически, применяя к соотношению (40) формулу обращения (37).

8. Преобразование системы

Исследуем вариантность рассмотренных нами величин и докажем их тензорный характер. Пусть мы имеем преобразование

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= T\mathbf{x}', \\ \mathbf{y} &= Q\mathbf{y}', \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$
$$|T||Q| \neq 0$$

Дисперсии и комбинационный момент, согласно (39), преобразуются по формулам:

$$D_1' = T^{-1}D_1T^{*^{-1}},$$
$$M' = T^{-1}MQ^{*^{-1}},$$
$$D_2' = Q^{-1}D_2Q^{*^{-1}}.$$

Параметры комбинационного распределения преобразуются согласно (39) и (40):

$$F' = T^*FT,$$
$$G' = T^*GQ,$$
$$H' = Q^*HQ.$$

Подставляя (39) в формулы для P, Δ, R, получаем их закон преобразования:

$$\left.\begin{aligned} &P_{12}' = M'D_2'^{-1} = T^{-1}P_{12}Q; && P_{21}' = Q^{-1}P_{21}T; \\ &R_1'^2 = P_{12}'P_{21}' = T^{-1}R_1^2T; && R_2'^2 = Q^{-1}R_2^2Q; \\ &\Delta_1' = F'^{-1} = T^{-1}\Delta_1T^{*-1}; && \Delta_2' = Q^{-1}\Delta_2Q^{*-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Таким образом, мы непосредственно убедились, что условные дисперсии представляют контрвариантные тензоры в соответствующих пространствах, а R_1^2 и R_2^2 являются смешанными тензорами в U_n и V_n.

Можно также легко проверить инвариантность уравнений регрессии:

$$\mathbf{y} = P_{21}\mathbf{x},$$
$$Q\mathbf{y}' = P_{21}T\mathbf{x}',$$
$$\mathbf{y}' = Q^{-1}P_{21}T\mathbf{x}' = P_{21}'\mathbf{x}'.$$

Отметим смешанный характер преобразования P_{21} (а также P_{12}, M, G). Перечисленные величины зависят от двух координатных систем и поэтому в их закон преобразования одновременно входят T и Q.

Величины подобного рода рассматривались уже Скаутеном и были им названы «связывающими» тензорами (Verbindungsgrössen) [9].

Так как R_1^2 и R_2^2 являются смешанными тензорами, то для каждого из них существует система инвариантов — их собственные значения $\underset{1}{r_i}$ и $\underset{2}{r_i}$ — корни уравнений

$$|R_1^2 - r^2E| = 0, \qquad (65)$$
$$|R_2^2 - r^2E| = 0. \qquad (65a)$$

Докажем, что инварианты R_1^2 и R_2^2 совпадают. Для этого достаточно показать их совпадение хотя бы только в одной

системе координат (или для одной из эквивалентных систем) в силу инвариантности.

Если в какой-либо эквивалентной системе матрицы P_{12} и P_{21} коммутируют, то для такой системы R_1^2 и R_2^2 численно совпадают и теорема доказана. Предположим, что $|P_{12}| \neq 0$; тогда, полагая

$$T = P_{12}; \quad Q = E,$$

находим искомую систему. Матрица регрессии

$$P'_{12} = P_{12}^{-1} P_{12} E = E$$

и коммутирует со всеми матрицами.

Переходя к пределу, можно обобщить результат и на случай особенных P. Пусть $|P_{12}| = 0$, что может быть только, если $|M| = 0$. Рассмотрим «соседнюю» корреляционную систему, у которой

$$D'_1 = D_1; \quad D'_2 = D_2; \quad M' = M + \eta E.$$

При достаточно малых η, но больших нуля

$$|\lambda_1| > \eta > 0,$$

где λ_1 — первый отличный от нуля корень уравнения

$$|M - \lambda E| = 0,$$

$$|M'| = |M + \eta E| \neq 0.$$

Как корни характеристического уравнения (65), $\underset{1}{r_i^2}$ и $\underset{2}{r_i^2}$ являются непрерывными функциями элементов матрицы M и, следовательно, в данном случае переменного параметра η.

Так как при $\eta > 0$

$$\underset{1}{r_i} = \underset{2}{r_i}$$

и предельные значения $\underset{1}{r_i}(0)$ и $\underset{2}{r_i}(0)$ существуют, то в силу непрерывности они не могут быть различными.

Благодаря равенству инвариантов $\underset{1}{r_i}$ и $\underset{2}{r_i}$ мы можем говорить вообще о *корреляционных инвариантах системы* r_i; число их всегда равно n (учитывая кратность корней).

Покажем, что у тензоров корреляции существует система независимых главных направлений, т. е. матрицы R_1^2 и R_2^2 всегда приводимы к диагональному виду.

Доказательство основывается на соотношении (56)

$$R^2 = E - \Delta D^{-1}.$$

Так как D не вырождено и $\dot{\mathrm{u}} D \dot{\mathrm{u}}$ является положительной квадратичной формой ковариантного вектора $\dot{\mathrm{u}}$, то на основании известной теоремы о приводимости пар квадратичных форм (из которых одна определенная) [(4) и (5)], существует n независимых ковариантных векторов таких, что

$$\Delta \dot{\mathrm{u}}_i = \lambda_i D \dot{\mathrm{u}}_i, \tag{66}$$

причем λ_i удовлетворяют уравнению

$$|\Delta - \lambda D| = 0.$$

Полагая

$$\mathbf{n}_i = D\dot{\mathbf{u}}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_i = D^{-1}\mathbf{n}_i,$$

подставим в (66)

$$\Delta D^{-1}\mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i,$$

$$R^2\mathbf{n}_i = (E - \Delta D^{-1})\,\mathbf{n}_i = (1 - \lambda_i)\,\mathbf{n}_i = r_i^2\mathbf{n}. \tag{67}$$

Таким образом

$$r_i^2 = 1 - \lambda_i. \tag{68}$$

Система контрвариантных векторов

$$\mathbf{n}_i = D\dot{\mathbf{u}}_i \tag{69}$$

является системой главных направлений соответствующего R. Так как $\dot{\mathbf{u}}$ линейно независимы и $|D| \neq 0$, то $\mathbf{n}_i$ также линейно независимы.

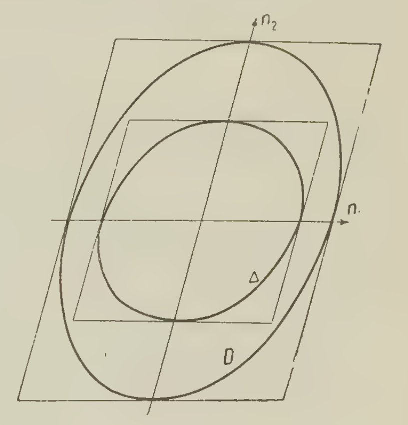
Из доказанного следует также, что r_i^2 всегда вещественны.

Покажем, что

$$0 \leqslant r_i^2 \leqslant 1, \tag{70}$$

или, что равносильно,

$$1 \geqslant \lambda_i \geqslant 0.$$



Сконструируем с помощью ковариантного вектора скалярную случайную величину

$$\alpha = (\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x}).$$

Она, очевидно, связана нормальной корреляцией с системой компонент $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Определим основную и условную дисперсию α на основании (23):

$$D(\alpha) = \sigma_\alpha^2 = \dot{\mathbf{u}}D_1\dot{\mathbf{u}},$$

$$\Delta(\alpha) = \delta_\alpha^2 = \dot{\mathbf{u}}\Delta_1\dot{\mathbf{u}}.$$

Так как на основании соображений элементарной теории корреляции $0 \leqslant \delta^2 \leqslant \sigma^2$, то для произвольного $\dot{\mathbf{u}}$

$$0 \leqslant \frac{\dot{\mathbf{u}}\Delta_1\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\mathbf{u}}D_1\dot{\mathbf{u}}} \leqslant 1.$$

Полагая $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_i$, получаем искомое неравенство в силу (66).

Главным направлениям тензора корреляции можно дать наглядную интерпретацию — как системе направлений, взаимно сопряженных относительно эллипсоидов дисперсии:

$$\mathbf{x}D^{-1}\mathbf{x} = 1, \tag{71}$$

$$\mathbf{x}\Delta^{-1}\mathbf{x} = 1. \tag{72}$$

Плоскости, сопряженные направлению $\mathbf{n}$ относительно эллипсоидов (71), (72), выразятся уравнениями:

$$\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0,$$

$$\dot{\mathbf{u}}'\mathbf{x} = 0,$$

где

$$\dot{\mathbf{u}} = D^{-1}\mathbf{n},$$

$$\dot{\mathbf{u}}' = \Delta^{-1}\mathbf{n}.$$

Для совпадения полученных плоскостей необходимо и достаточно, чтобы

$$\dot{\mathbf{u}} = \lambda\dot{\mathbf{u}}',$$

$$D^{-1}\mathbf{n} = \lambda\Delta^{-1}\mathbf{n},$$

$$\Delta D^{-1}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n}.$$

Таким образом, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_i$ является главным направлением тензора корреляции.

Условие совпадения сопряженных плоскостей можно заменить условием параллельности касательных плоскостей, определяемых уравнениями

$$\dot{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 1,$$

$$\dot{\mathbf{u}}'\mathbf{x} = 1.$$

Изложенное иллюстрировано на чертеже в применении к двухмерному вектору.

9. Каноническая система координат

Докажем существование некоторой специальной системы координат, в которой все рассмотренные нами тензоры выражаются диагональными матрицами. Такую систему будем называть канонической. Достаточно показать, что матрицы D_1, M, D_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду при помощи неособенных преобразований (36).

Доказательство основывается на нижеследующей лемме:

Всякая матрица может быть представлена в форме произведения

$$M = \Omega_1 [m_i] \Omega_2, \tag{73}$$

*где Ω_1 и Ω_2 — ортогональные матрицы *.*

Доказательство. Так как MM^* симметрично, то

$$MM^* = \Omega_1 [s_i] \Omega_1^*,$$

где s_i — вещественны, или

$$\Omega_1^* MM^* \Omega_1 = [s_i].$$

Полагая

$$\Omega_1^* M = M_1,$$

имеем

$$M_1 M_1^* = [s_i],$$

или в координатах

$$\sum_{\omega=1}^{n} (M_1)_{i\omega} (M_1)_{k\omega} = s_i \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

* В несколько иной формулировке это предложение было доказано Ф. Р. Гантмахером в 1929 г. ([8]).

Трактуя строки M_1 как вектора $\mathbf{m}_i = (M_{1\,i\omega})$, $\omega = 1, 2, \ldots, n$, перепишем последнее равенство в виде скалярных произведений

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m}_i^2 &= s_i \geqslant 0, \\ \mathbf{m}_i\mathbf{m}_k &= 0 \quad i \neq k. \end{aligned}\right\}$$

Нормируя векторы $\mathbf{m}_i$, получаем ортогонально нормированную систему:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m}_i &= |\sqrt{s_i}|\,\mathbf{n}_i, \\ \mathbf{n}_i\mathbf{n}_k &= \delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Если среди s_i имеются нули, то соответствующие $\mathbf{n}_i$ выбираются произвольно, лишь бы они с остальными $\mathbf{n}$ образовали нормальную систему. Образуя из $\mathbf{n}_i$ ортогональную матрицу

$$\Omega_2 = \{\,\mathbf{n}_i\,\} = \{\,n_{ik}\,\};$$

можно переписать соотношения (74) в виде одного матричного равенства

$$M_1 = [\sqrt{s_i}\,]\,\Omega_2.$$

Но так как $M = \Omega_1 M_1$, то, полагая $|\sqrt{s_i}| = m_i \geqslant 0$, получаем искомый результат (73).

Произведем преобразование дисперсии. Так как формы $\mathbf{x}D_1^{-1}\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}D^{-1}\mathbf{y}$ существенно положительны и, следовательно, приводимы к сумме квадратов, то D_1 и D_2 приводимы к единичным матрицам. Пусть

$$\mathbf{x} = T_1\mathbf{x}',$$
$$\mathbf{y} = Q_1\mathbf{y}'$$

соответствующее преобразование системы. Тогда

$$D_1' = T_1^{-1}D_1T_1^{*-1} = E,$$
$$D_2' = Q_1^{-1}D_2Q_1^{*-1} = E,$$
$$M' = T^{-1}MQ_1^{*-1}.$$

Применим доказанную лемму (73):

$$M' = \Omega_1\,[m_i]\,\Omega_2^*.$$

Преобразуем полученную систему еще раз с помощью ортогональных преобразований:

$$\mathbf{x}' = \Omega_1\mathbf{x}'',$$
$$\mathbf{y}' = \Omega_1\mathbf{y}''.$$

Тогда

$$D_1'' = \Omega_1^*E\Omega_1 = E,$$
$$D_2'' = \Omega_2^*\Omega E_2 = E,$$
$$M'' = \Omega_1^*\Omega_1\,[m_i]\,\Omega_2^*\Omega_2 = [m_i].$$

Полагая

$$T = T_1\Omega_1, \quad Q = Q_1\Omega_2,$$

получаем искомое преобразование

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'', \quad \mathbf{y} = Q\mathbf{y}'', \qquad (75)$$

приводящее первоначальную систему к каноническому виду (штрихи опускаем):

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= E, \\ M &= [m_i], \\ D_2 &= E. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

При интерпретации преобразований (75), как преобразований координат, компоненты единичных векторов новой (канонической) системы в старой системе выражаются вертикальными колонками матриц T и Q. Направления координатных векторов канонической системы $\mathfrak{t}_i$ и $\mathfrak{q}_i$ мы будем называть **главными корреляционными направлениями**.

Найдем выражения основных корреляционных характеристик (P, Δ, R) в канонической системе координат (76) согласно (61), (62), (63):

$$P_{12} = P_{21} = [m_i], \tag{77}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = E - [m_i^2] = [(1 - m_i^2)], \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned} R_1^2 = R_2^2 &= [m_i^2], \\ R_1 = R_2 &= [m_i]. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Следовательно,

$$r_i = m_i. \tag{79a}$$

Таким образом, диагональные элементы приведенного комбинационного момента совпадают с корреляционными инвариантами. Так как

$$M_{ik} = \text{М.О.}\,(x_i y_k),$$

то легко раскрыть вероятностный смысл корреляционных инвариантов. Обозначим через r_{ik} коэффициент корреляции между i-той компонентой $\mathbf{x}$ и k-той компонентой $\mathbf{y}$:

$$r_{ik} = r(x_i, x_k) = \frac{\text{М.О.}\,(x_i y_k)}{\sqrt{\text{М.О.}\,x_i^2}\,\sqrt{\text{М.О.}\,y_i^2}} = \frac{M_{ik}}{\sqrt{D_{ii}}\,\sqrt{D_{kk}}}.$$

В канонической системе

$$r_{ik} = \left\{\begin{matrix} m_i = r_i & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{matrix}\right\}. \tag{80}$$

Итак, корреляционные инварианты имеют смысл **коэффициентов корреляции** между **соответствующими** компонентами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в **канонической системе координат**. Коэффициенты корреляции между несоответствующими компонентами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, равно как и различными компонентами одного и того же вектора, равны нулю.

Напишем выражение функции комбинационного распределения в канонических координатах (x_i', y_i'), пользуясь формулами (42), (40), (37) и (52):

$$F' = \left[\frac{1}{1 - r_i^2}\right], \quad G' = \left[\frac{-r_i}{1 - r_i^2}\right], \quad H' = \left[\frac{1}{1 - r_i^2}\right],$$

$$|D'| = |D_1' D_2' - M' D_2'^{-1} M'^{*} D_2'| = |E - [m_i^2]| = \prod_{i=1}^{n} (1 - r_i^2),$$

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i'^2}{1 - r_i^2} + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-r_i x_i' y_i'}{1 - r_i^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i'^2}{1 - r_i^2}.$$

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_i^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_i^2)}(x_i'^2 - 2r_i x_i' y_i' + y_i'^2)} dx_i' \, dy_i' = \prod_{i=1}^{n} p(x_i', y_i'). \qquad (81)$$

Таким образом, отдельные пары соответствующих координат представляют систему независимых случайных величин. Тем самым задача сводится к изучению корреляции одномерных объектов.

10. Разложение системы

Доказанную выше теорему о существовании главных корреляционных направлений можно теперь сформулировать в следующей инвариантной форме: в пространствах U_n и V_n существуют такие системы линейно независимых направлений, что при разложении векторов по этим направлениям

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{y}_n$$

корреляция x, y разлагается в произведения линейных корреляций соответствующих компонент:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \qquad (81a)$$

где $\mathbf{x}_i = x_i' \mathbf{t}_i$, $\mathbf{y}_i = y_i' \mathbf{q}_i$, $\mathbf{t}_i$ и $\mathbf{q}_i$ — координатные векторы канонической системы.

Коэффициенты корреляции этих частичных линейных систем равны корреляционным инвариантам. Отсюда, как следствие, получаем теорему об эквивалентности:

Если две нормальные корреляционные системы из двух случайных n-мерных векторов имеют соответственно равные корреляционные инварианты, то системы эквивалентны.

Обе системы могут быть разложены в произведения линейных корреляций, причем коэффициенты корреляции соответствующих частичных систем равны (так как они совпадают с общими корреляционными инвариантами). На основании свойства коэффициента корреляции (стр. 341) соответствующие линейные корреляционные системы эквивалентны, так как их коэффициенты корреляции равны. Но если эквивалентны частичные системы, то эквивалентно и их произведение.

Вопрос об однозначности разложения данной n-мерной корреляции в произведение линейных корреляций сводится к однозначности определения канонической системы координат. Действительно, мы показали, что каноническая система координат определяет разложение; обратное совершенно очевидно — каждому разложению на линейные корреляции соответствует определенная каноническая система координат (с точ-

ностью до масштабов). Достаточно взять за направление осей направления компонентов разложения.

Покажем, что *если все корреляционные инварианты различны*, т. е. если уравнение

$$|R^2 - r^2 E| = 0 \tag{65}$$

не имеет кратных корней, *то главные корреляционные направления определяются однозначно*, т. е. существует только одно (с точностью эквивалентности) разложение системы на линейные.

Действительно, главные корреляционные направления всегда существуют и являются одновременно главными направлениями соответствующих тензоров корреляции (так как последние в канонической системе выражаются диагональными матрицами). Но если среди r_i^2 нет кратных, то для каждого из тензоров R_1 и R_2 существует только одна система главных направлений, которая, следовательно, совпадает с системой главных корреляционных направлений в данном пространстве.

Это свойство дает возможность практически удобно разложить систему на составляющие. В произвольной системе координат определяем компоненты тензоров R_1^2 и R_2^2, затем определяем корреляционные инварианты и главные направления, которые в силу однозначности определения и будут главными корреляционными направлениями. Остается выбрать их за оси координат, и мы автоматически получим разложение в функции комбинационного распределения на множители

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sigma_{x_i}\sigma_{y_i}\sqrt{1-r_i^2}} e^{-\frac{1}{1-r_i^2}\left(\frac{x_i^2}{\sigma_{x_i}^2} - 2r_i\frac{x_i}{\sigma_{x_i}}\frac{y_i}{\sigma_{y_i}} + \frac{y_i^2}{\sigma_{y_i}^2}\right)} dx_i\, dy_i. \tag{81b}$$

Значения σ_{x_i} и σ_{y_i} в этом случае могут быть произвольными и зависят лишь от выбора масштабов.

Предположим теперь противоположный случай, — все инварианты совпадают:

$$r_i = r.$$

Так как R^2 приводимо, то в этом случае $R^2 = r^2 E$ в любой системе координат.

За главное направление в одном из пространств (например U_n) может быть принята любая система направлений, сопряженных относительно D_1^{-1}, тем самым в V_n главные направления определяются однозначно при помощи уравнения регрессии

$$\mathbf{q}_i = \mu P_{21} \mathbf{t}_i,$$

где $\mathbf{t}_i$ — главное направление в U_n. Только в этом случае P будут выражаться диагональными матрицами. Если предполагать, что дисперсии приведены к нормальному виду $D_1 = D_2 = E$, то главные направления в системе $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяются с точностью до одного произвольного ортогонального преобразования. Этот случай мы будем называть изотропной корреляцией (определяемой одним только скаляром r).

Разберем общий случай. Уравнение (65) имеет корни

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \text{ — кратности } d_1 \\ r_2 \text{ — кратности } d_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_p \text{ — кратности } d_p \end{array}\right\} d_1 + d_2 + \ldots + d_p = n.$$

Каждое из пространств расщепляется на инвариантные многообразия (по отношению к преобразованию с помощью тензора корреляции):

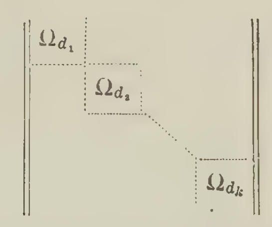
$$U_n = U_{d_1} + U_{d_2} + \ldots + U_{d_n}, \qquad (82)$$

$$V_n = V_{d_1} + V_{d_2} + \ldots + V_{d_n}, \qquad (82а)$$

соответствующие значениям корней $r_1, r_2, \ldots, r_p$ (6).

Многообразия U_{d_1} и V_{d_n} связаны изотропной корреляцией, а первоначальная система *разлагается в произведение изотропных корреляций.* Разложение это (в произведение изотропных корреляций с различными r_k) однозначно.

Разложение на линейные составляющие в общем случае уже неоднозначно и определяется с точностью до произвольного квазидиагонального ортогонального преобразования



Тем самым мы получили полную классификацию нормальных корреляций двух n-мерных векторов.

Отметим особо случай вырождения корреляции. Последнее имеет место, если некоторые из корреляционных инвариантов равны единице; соответствующие им компоненты x_i и y_i связаны функциональными соотношениями. Ранг Δ равен *числу отличных от единицы инвариантов.* При $R = E$ имеем полное вырождение: $\Delta = 0$, векторы x и y связаны линейным функциональным соотношением.

Приложение. Уравнения регрессии с точки зрения принципа наименьших квадратов

Как известно, уравнения регрессии удовлетворяют принципу наименьших квадратов:

$$\text{М.О.}\,(x - Py)^2 = \text{minima}.$$

Это требование может служить также определением уравнения регрессии. Покажем, что и для случайных векторов имеет место аналогичная теорема.

Зададим в U_n метрику с помощью определенной положительной квадратичной формы

$$|\mathbf{x}|^2 = G_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}). \tag{83}$$

Определим линейную вектор-векторфункцию $P\mathbf{y}$ из условия

$$\text{M.O.}\, |\mathbf{x} - P\mathbf{y}|^2 = \text{minima}. \tag{84}$$

Покажем, что $P\mathbf{y}$ совпадает с отображением регрессии. Для доказательства запишем условие (84) в координатах:

$$S = \text{M.O.}\, |\mathbf{x} - P\mathbf{y}|^2 = \text{M.O.} \left[G_{\alpha\beta} (x^\alpha - P^\alpha_\lambda y^\lambda)(x^\beta - P^\beta_\omega y^\omega) \right] = \text{minima},$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial P^\gamma_\mu} = \text{M.O.} \left[- G_{\gamma\beta} (x^\beta - P^\beta_\omega y^\omega) y^\mu - G_{\alpha\gamma} (x^\alpha - P^\alpha_\omega y^\omega) y^\mu \right] = 0,$$

но

$$G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}, \quad \text{M.O.}\, x^\alpha y^\beta = M^{\alpha\beta}, \quad \text{M.O.}\, y^\alpha y^\beta = D_2^{\alpha\beta},$$

следовательно,

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial P^\alpha_\beta} = G_{\alpha\gamma} (M^{\gamma\beta} - P^\gamma_\omega D_2^{\omega\beta}) = 0$$

или в матричной форме

$$G(M - PD_2) = 0;$$

так как $|G| \neq 0$, то

$$P = MD_2^{-1}. \tag{85}$$

Мы получили уже известные нам соотношения для P (61). Заметим, что метрика нами была введена произвольно, $G_{\alpha\beta}$ удовлетворяло лишь требованию определенности и его значение не отразилось на результате. Это связано с аффинной инвариантностью уравнений регрессии.

Саратовский гос. университет.

Поступило 21.II.1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 1936.
2. Чупров А. А., Основные проблемы теории корреляции, 1926.
3. Mises K., Wahrscheinlichkeitsrechnung, L. u. W. 1931, стр. 50—53.
4. Бохер Н., Введение в высшую алгебру, 1934.
5. Широков П. А., Тензорное исчисление, 1934.
6. Шрайер О. и Шпернер П., Теория матриц, 1936.
7. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 1934, стр. 316.
8. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., О нормальных операторах в эрмитовом пространстве, 1929.
9. Schouten J. A. und Struik D. J., Einführung in der neueren Methoden der Differentialgeometrie, B. I, 1935, стр. 9.

A. M. OBOUKHOFF. SUR LA CORRÉLATION NORMALE DES VECTEURS

RÉSUMÉ

L'étude des vecteurs aléatoires dans U_n se simplifie beaucoup par l'application de la théorie des fonctions-vecteurs linéaires. Nous introduisons la valeur moyenne, soit

$$E(\mathbf{x}) = \int \varphi(\mathbf{x})\, \mathbf{x}\, du$$

d'un vecteur aléatoire; nous considérons de plus son tenseur de dispersion

$$D(\mathbf{x}) = E\left\{(\mathbf{x} - E\mathbf{x})^2\right\}.$$

La distribution supposée normale d'un vecteur aléatoire est complètement déterminée par $E(\mathbf{x})$ et $D(\mathbf{x})$.

La corrélation entre deux vecteurs aléatoires se détermine par une répartition des probabilités dans un espace à $2n$ dimensions, dont les points sont des produits directs $(\mathbf{x} \bigcirc \mathbf{y})$. Nous introduisons la notion d'équivalence en corrélation: deux systèmes $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe une correspondance biunivoque

$$\mathbf{x} \longleftrightarrow \mathbf{x}',$$
$$\mathbf{y} \longleftrightarrow \mathbf{y}',$$

telle que les probabilités des combinaisons correspondantes soient identiques. Le but de la théorie de corrélation est l'étude des invariants caractérisant le système donné à une équivalence près.

En supposant que le système se compose de deux vecteurs aléatoires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ en corrélation normale, on introduit les notions suivantes:

1) l'image de regression (P_{12}, P_{21})—une fonction-vecteur permettant définir les valeurs moyennes conditionnelles;

2) la dispersion conditionnelle — un tenseur contravariant fixe;

3) les tenseurs de corrélation R_1 et R_2—produits des images de corrélation:

$$R_1^2 = P_{12} P_{21}, \quad R_2^2 = P_{21} P_{12}$$

qui sont des tenseurs mixtes des espaces correspondants.

Les invariants des tenseurs R_1 et R_2 sont les mêmes; leur ensemble caractérise le système donné à une équivalence près.

La décomposition des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ suivant les directions princi-

pales des tenseurs R_1 et R_2 entraîne la décomposition du système en corrélation en un produit

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \dots p(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$$

de facteurs donnant la corrélation des composantes correspondantes. Cette décomposition est unique lorsque les invariants sont tous différents entre eux.

Ces résultats peuvent être appliqués aux études où les données experimentales se présentent sous la forme de vecteurs statistiques, par exemple dans l'étude du magnétisme et dans la météorologie (étude statistique des vents).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НЕКОТОРЫМ СЛУЧАЯМ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье рассматриваются три примера (из которых последний является частным случаем второго) движения грунтовой воды через земляные плотины. Для их решения применяется теория линейных уравнений типа Фукса, причем, так как в этих примерах число особых точек удается свести к трем, то получаются просто уравнения гипергеометрического ряда.

Если рассматривается такое движение грунтовой воды, в котором нет промежутка высачивания, то обычно для решения задачи применяется метод Кирхгофа-Жуковского (см. например ([8])). А именно, известно, что годограф скорости состоит в этих случаях из отрезков прямых, проходящих через начало, и дуг окружности, касающейся оси горизонтальной составляющей скорости в начале координат. Инверсия в окружности вдвое большего радиуса с центром в начале координат переводит как окружность, так и прямые в прямые, так что после инверсии получаем многоугольную область. С другой стороны, на плоскости комплексного потенциала мы будем иметь область, ограниченную отрезками, параллельными осям координат. Отображая на полуплоскость обе многоугольные области, мы можем определить все элементы движения.

Если же имеется промежуток высачивания, то ему соответствует на плоскости комплексного потенциала неизвестная кривая, а на плоскости комплексной скорости — прямая, не проходящая через начало, вследствие чего непосредственное применение формулы Кристоффеля-Шварца делается невозможным.

Б. Б. Девисон (([1]), ([2]), ([3])) в 1932 г. и Г. Гамель (([6]) и ([7])) в 1934 г. решили задачу о движении грунтовой воды через земляную плотину с вертикальными стенками, на непроницаемом горизонтальном основании. В этом движении всегда имеется промежуток высачивания. Оба автора сводят задачу к решению задачи Дирихле для функции $\frac{dz}{dw}$ (где $z=x+iy$, $w=v_x-iv_y$ — комплексная скорость), значения аргумента которой на контуре им удается определить. Этот метод приводит

к громоздким вычислениям, трудно осуществимым на практике. Трудности значительно усложняются, если пытаться обобщить задачу на случай плотины с наклонными стенками.

В настоящей работе дается новый метод решения задачи, основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. А именно, решение задачи Девисона, а также второй задачи — о движении грунтовой воды через земляной экран, сечение которого представляет прямоугольный треугольник,—сводится к построению интегралов линейного уравнения с тремя особыми точками, т. е. гипергеометрического уравнения. Тема этой работы была предложена мне Н. Е. Кочиным, которому принадлежит основная идея метода — применение теории линейных уравнений.

В следующей работе я предполагаю рассмотреть ряд задач, в которых число особых точек равно четырем и пяти,—такова, в частности, задача, аналогичная задаче Девисона, где, однако, вертикальные стенки заменены наклонными.

§ 1

В этом параграфе рассматривается предварительная задача, результатами решения которой нам придется в дальнейшем пользоваться.

Пусть имеем функции Z и F, регулярные в верхней полуплоскости плоскости комплексного переменного t. При этом вещественная ось

Фиг. 1

разбивается точками A, B, C и т. д. на отрезки AB, BC, ..., на каждом из которых выполняется по два условия вида: мнимая часть некоторой линейной комбинации наших функций с постоянными коэффициентами равна нулю. Пусть на отрезке AB (фиг. 1) имеем:

$$\left. \begin{aligned} I(MZ+NF)=0, \\ I(PZ+QF)=0, \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

а на соседнем отрезке BC

$$\left. \begin{aligned} I(mZ+nF)=0, \\ I(pZ+qF)=0 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

(I означает мнимую часть функции).

При этом должны выполняться условия:

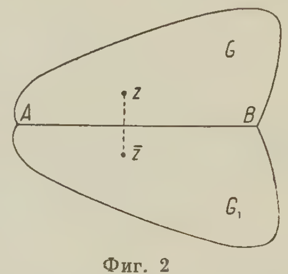
$$MQ-NP \neq 0, \quad mq-np \neq 0.$$

Покажем, что функции Z и F могут быть аналитически продолжены на всю плоскость комплексного переменного t, причем при обходе вокруг особых точек A, B, C и т. д. они претерпевают линейные подстановки. Вычислим коэффициенты подстановки при обходе вокруг особой точки B.

Мы можем воспользоваться принципом симметрии Римана-Шварца, причем для нас достаточен частный случай этого принципа, а именно:

Если функция $f(z)$ регулярна внутри области G, часть контура которой составляет отрезок вещественной оси (фиг. 2), и если при приближении к этому отрезку $f(z)$ стремится к определенным вещественным значениям, непрерывным вдоль AB, то функция $f(z)$ может быть продолжена в область G_1, симметричную с G относительно вещественной оси. При этом продолженная функция будет в сопряженных точках принимать сопряженные значения, т. е.

$$f(\overline{z}) = \overline{f}(\overline{z}).$$



Фиг. 2

В силу физических условий рассматриваемых нами дальше задач непрерывность значений функций Z и F должна иметь место, так же как и существование предельных значений этих функций при приближении к точкам контура. В силу условий (1) функции $MZ+NF$ и $PZ+QF$ принимают на контуре вещественные значения. Следовательно, эти функции могут быть продолжены через отрезок AB в нижнюю часть плоскости t, причем в симметричных относительно вещественной оси точках они принимают сопряженные значения.

Сделаем теперь в плоскости t разрез вдоль отрезка BC и возьмем произвольную точку A' на верхнем краю разреза. После обхода вокруг точки B в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном движению часовой стрелки, мы придем в точку A'', находящуюся на нижнем крае разреза. При этом, если в точке A' значения наших функций были Z и F, то в точке A'' обозначим их через Z^* и F^*. На основании сказанного выше должно быть:

$$\left.\begin{aligned} MZ^* + NF^* &= \overline{M}\overline{Z} + \overline{N}\overline{F}, \\ PZ^* + QF^* &= \overline{P}\overline{Z} + \overline{Q}\overline{F} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(так как A' и A'' можно рассматривать как симметричные относительно вещественной оси точки).

Обратимся теперь к условиям на отрезке BC. В точке A' этого отрезка имеем:

$$I(mZ+nF) = 0.$$

Если написать $mZ+nF$ в форме

$$mZ + nF = \frac{1}{2}(mZ + nF + \overline{m}\overline{Z} + \overline{n}\overline{F}) + \frac{1}{2}(mZ + nF - \overline{m}\overline{Z} - \overline{n}\overline{F}),$$

то это условие можно заменить таким:

$$mZ + nF - \overline{m}\overline{Z} - \overline{n}\overline{F} = 0$$

в точке A', а следовательно, и в точке A''.

Таким же образом найдем

$$pZ + qF - \overline{p}\overline{Z} - \overline{q}\overline{F} = 0$$

в A', а также в A''.

Из последних двух уравнений можем выразить $\overline{Z}$ и $\overline{F}$ через Z и F, затем подставить найденные $\overline{Z}$ и $\overline{F}$ в уравнения (3) и решить последние относительно Z^* и F^*. Получим:

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= \frac{\begin{vmatrix} \overline{M} & N \\ \overline{P} & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} mZ+nF & \overline{n} \\ pZ+qF & \overline{q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} N & \overline{N} \\ Q & \overline{Q} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} mZ+nF & \overline{m} \\ pZ+qF & \overline{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{m} & \overline{n} \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}}, \\ F^* &= \frac{\begin{vmatrix} M & \overline{M} \\ P & \overline{P} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} mZ+nF & \overline{n} \\ pZ+qF & \overline{q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{N} & M \\ \overline{Q} & P \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} mZ+nF & \overline{m} \\ pZ+qF & \overline{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{m} & \overline{n} \\ \overline{p} & \overline{q} \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если раскрыть определители, то будем иметь:

$$\begin{aligned} Z^* &= \frac{[(m\overline{q}-p\overline{n})(\overline{M}Q-\overline{P}N)+(\overline{m}p-\overline{p}m)(\overline{N}Q-\overline{Q}N)]\,Z}{(MQ-NP)(\overline{m}\overline{q}-\overline{n}\overline{p})}+ \\ &+\frac{[(n\overline{q}-q\overline{n})(\overline{M}Q-\overline{P}N)+(\overline{m}q-p\overline{n})(\overline{M}P-M\overline{P})]\,F}{(MQ-NP)(\overline{m}\overline{q}-\overline{n}\overline{p})}, \\ F^* &= \frac{[(m\overline{q}-p\overline{n})(M\overline{P}-\overline{M}P)+(\overline{m}p-\overline{p}m)(M\overline{Q}-P\overline{N})]\,Z}{(MQ-NP)(\overline{m}\overline{q}-\overline{n}\overline{p})}+ \\ &+\frac{[(n\overline{q}-\overline{q}n)(M\overline{P}-\overline{M}P)+(\overline{m}q-p\overline{n})(M\overline{Q}-P\overline{N})]\,F}{(MQ-NP)(\overline{m}\overline{q}-\overline{n}\overline{p})}. \end{aligned} \tag{5}$$

При выводе формул (4) или (5) мы исходили из точки A', лежащей на отрезке BC, так что эти формулы справедливы для точек отрезка BC. Но так как функции Z, F, Z^* и F^* аналитические, то формулы (4) и (5) справедливы вообще, т. е. если бы мы взяли любую точку верхней полуплоскости и в ней взяли бы значения функций Z и F, дающие решение нашей задачи, то после однократного обхода точки B в положительном направлении мы вернемся в исходную точку со значениями Z^* и F^*, удовлетворяющими равенствам (5). Таким образом (5) представляют искомую подстановку функций Z, F при обходе вокруг особой точки B.

Отметим, что для получения подстановки около точки $t=\infty$ нужно считать, что большие буквы M, P, N, Q принадлежат правому, а малые m, n, p, q — левому отрезкам вещественной оси, примыкающим к бесконечно удаленной точке (на фиг. 1 большие буквы должны быть на отрезке CD, малые — на отрезке AD).

Обозначим для краткости коэффициенты подстановки (5) буквами A, B, C, D:

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= AZ+BF, \\ F^* &= CZ+DF. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Тогда, как известно (см. например Schlesinger, «Lineare Differentialgleichungen»), можно найти каноническую подстановку, если решить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Пусть корни этого уравнения будут λ и λ'. Так как по физическому смыслу наших функций Z и F (см. дальше примеры движения грунтовых вод) мы должны считать их имеющими лишь регулярные особые точки (см. по этому поводу Б. Девисон[1]), то Z и F вблизи особой точки, например точки $t=0$, должны выражаться линейно через функции Y_1 и Y_2 вида

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= t^{\alpha}\Phi_1(t), \\ Y_2 &= t^{\alpha'}[\mu\Phi_1(t)\lg t + \Phi_2(t)], \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $\Phi_1(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad \Phi_2(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$

Если $\alpha \neq \alpha'$, то $\mu=0$ (см. Schlesinger, стр. 162).

При этом показатели α и α' связаны с корнями характеристического уравнения λ, λ' следующими соотношениями:

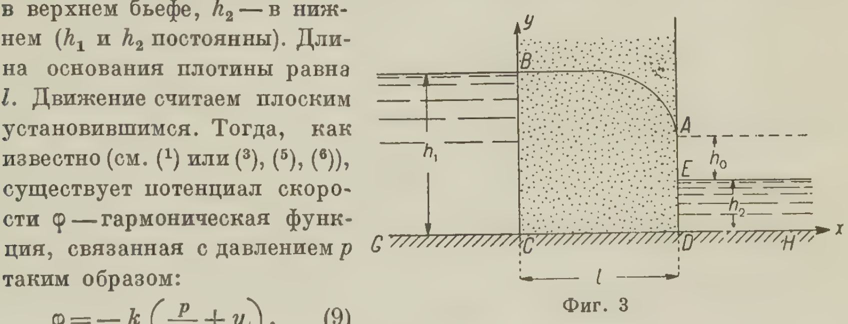
$$\alpha=\frac{\lg\lambda}{2\pi i}, \quad \alpha'=\frac{\lg\lambda'}{2\pi i}. \tag{8}$$

α и α' определяются с точностью до целых слагаемых, вследствие многозначности логарифма. Дальше на примерах мы выясним, каким образом при решении гидродинамических задач получаются определенные значения α и α'.

§ 2

Перейдем теперь к рассмотрению задачи Девисона. Пусть имеем земляную плотину с вертикальными стенками AD и BC (фиг. 3). $GCDH$ — непроницаемое горизонтальное основание, h_1 — высота воды в верхнем бьефе, h_2 — в нижнем (h_1 и h_2 постоянны). Длина основания плотины равна l. Движение считаем плоским установившимся. Тогда, как известно (см. [1] или [3], [5], [6]), существует потенциал скорости φ — гармоническая функция, связанная с давлением p таким образом:

$$\varphi=-k\left(\frac{p}{\rho g}+y\right), \tag{9}$$



Фиг. 3

где k — коэффициент фильтрации земляного слоя, p — давление, ρ — постоянная плотность, g — ускорение силы тяжести, y — высота, отсчитываемая от непроницаемого основания.

Рассмотрим условия на контуре.

1° На свободной поверхности AB давление должно равняться атмосферному:

$$p=p_0.$$

Поэтому, на основании уравнения (9), имеем

$$\varphi+ky=\frac{kp_0}{\rho g}=\text{const}. \tag{10}$$

Кроме того, линия AB есть линия тока, а потому на ней

$$\psi = Q = \text{const}, \tag{11}$$

где ψ — функция тока.

2° На отрезке BC имеем

$$x = 0. \tag{12}$$

Так как в водном бассейне давление можно считать изменяющимся с глубиной по гидростатическому закону, то для верхнего бьефа

$$p = p_0 + \rho g (h_1 - y).$$

Применяя это равенство к точкам границы BC, найдем из (9), что на BC

$$\varphi = -k\left(\frac{p_0}{\rho g} + h_1\right) = \varphi_1 = \text{const}. \tag{13}$$

3° На линии основания CD имеем

$$y = 0, \tag{14}$$

и так как CD есть линия тока,

$$\psi = \text{const}. \tag{15}$$

Выбрав эту константу равной нулю, получим, что постоянная Q в формуле (11) есть расход через сечение BC.

4° На линии DE условия аналогичны тем, которые мы имели на границе BC:

$$x = l, \tag{16}$$

$$\varphi = -k\left(\frac{p_0}{\rho g} + h_2\right) = \varphi_2 = \text{const}. \tag{17}$$

5° На промежутке высачивания EA, как и на линии DE,

$$x = l, \tag{18}$$

и давление равно атмосферному, откуда

$$\varphi + ky = -\frac{kp_0}{\rho g} = \text{const}. \tag{19}$$

Введем комплексную переменную

$$z = x + iy$$

и комплексный потенциал

$$f = \varphi + i\psi,$$

являющийся функцией z, и рассмотрим выражение

$$if + kz = -\psi + kx + i(\varphi + ky). \tag{20}$$

Тогда условия на контуре, как заметил Б. Девисон ([3]), могут быть переписаны так:

на	AB:	$I(if + kz) = \text{const}$,	$I(f) = \text{const}$;
»	BC:	$I(iz) = 0$,	$I(if) = \text{const}$;
»	CD:	$I(z) = 0$,	$I(f) = 0$;
»	DE:	$I(iz) = \text{const}$,	$I(if) = \text{const}$;
»	EA:	$I(iz) = \text{const}$,	$I(if + kz) = \text{const}$.

При этом Б. Б. Девисон отметил, что для всех видов прямолинейных границ и для линии свободной поверхности контурные условия, которые можно записать в виде

$$I(mz+nf)=\text{const},$$
$$I(pz+qf)=\text{const},$$

имеют определитель, отличный от нуля:

$$mq-pn \neq 0.$$

Отобразим область нашего движения на верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного t. Предположим, что при этом точка A (фиг. 3) переходит в точку $t=0$, точка B — в точку $t=1$, точка C — в некоторую точку $t=a$, D — в точку $t=b$, наконец, точка E пусть переходит в бесконечно удаленную точку. Вместо функций z и f будем рассматривать их производные по t, положив

$$z_1=\frac{dz}{dt}, \quad f_1=\frac{df}{dt}. \tag{21}$$

Тогда условия на контуре перейдут в однородные условия для z_1 и f_1:

на EA:	$I(iz_1)=0,$	$I(if_1+kz_1)=0;$
» AB:	$I(f_1)=0,$	$I(if_1+kz_1)=0;$
» BC:	$I(iz_1)=0,$	$I(if_1)=0;$
» CD:	$I(z_1)=0,$	$I(f_1)=0;$
» DE:	$I(iz_1)=0,$	$I(f_1)=0.$

Для дальнейшего упрощения контурных условий введем функции Z и F, с помощью равенств

$$\left.\begin{aligned} Z&=z_1\sqrt{(t-a)(b-t)},\\ F&=f_1\sqrt{(t-a)(b-t)}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Примем значения $\arg(t-a)$ и $\arg(b-t)$ на вещественной оси для $a<t<b$ равными нулю. Для этого промежутка будем иметь:

$$I(Z)=I(z_1)=0,$$
$$I(F)=I(f_1)=0.$$

При $t<a$ $\arg(t-a)=\pi$, при $t>b$ $\arg(b-t)=-\pi$, а потому для $t<a$

$$\sqrt{(t-a)(b-t)}=i\left|\sqrt{(t-a)(b-t)}\right|,$$

для $t>b$

$$\sqrt{(t-a)(b-t)}=-i\left|\sqrt{(t-a)(b-t)}\right|.$$

Поэтому для промежутков $(1, a)$ и (b, ∞) имеем для функций Z и F те же условия на контуре, что и для промежутка (a, b):

$$I(iz_1)=I(Z)=0,$$
$$I(if_1)=I(F)=0.$$

Точки a и b могли бы оказаться полюсами функций Z и F, но тогда z и f, как это видно из формул (21) и (22), обращались бы в бесконечность в этих точках (и притом порядка большего, чем логарифм); следовательно, такая возможность исключена.

Таким образом, для функций Z и F у нас остается три особых точки: 0, 1 и ∞, причем условия на контуре теперь будут иметь вид:

на EA, т. е. в промежутке $-\infty < t < 0$,

$$I(Z)=0, \quad I(F-ikZ)=0;$$

на AB, т. е. при $0 < t < 1$,

$$I(iF)=0, \quad I(F-ikZ)=0;$$

на BE, т. е. для $1 < t < \infty$,

$$I(Z)=0, \quad I(F)=0.$$

Эти условия указаны на фиг. 4.

$-\infty$ $I(F-ikZ)=0$ 0 $I(F-ikZ)=0$ 1 $I(Z)=0$ ∞
E $I(Z)=0$ A $I(iF)=0$ B $I(F)=0$ E

Фиг. 4

Теперь мы можем, пользуясь формулами (4), найти подстановки системы функций Z, F около особых точек. Рассматривая окрестность точки $t=0$, мы должны принять:

$$\begin{aligned} M&=-ik, & N&=1,\\ P&=1, & Q&=0,\\ m&=-ik, & n&=1,\\ p&=0, & q&=i,\end{aligned}$$

$$mZ+nF=F-ikZ,$$

$$pZ+qF=iF.$$

Поэтому будем иметь:

$$Z^{*}=\frac{\begin{vmatrix} ik & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F-ikZ & 1\\ iF & -i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F-ikZ & ik\\ iF & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -ik & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} ik & 1\\ 0 & -i\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{2iF+kF}{-k}=-Z-\frac{2i}{k}F,$$

$$F^{*}=\frac{\begin{vmatrix} -ik & ik\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F-ikZ & 1\\ iF & -i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -ik\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} F-ikZ & ik\\ iF & 0\end{vmatrix}}{-ik}=3F-2ikZ.$$

Видим, что функции Z и F при обходе вокруг точки $t=0$ в положительном направлении испытывают подстановку

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{2i}{k}\\ -2ik & 3\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\frac{2i}{k}\\ -2ik & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^2-2\lambda+1=0$.

Уравнение это имеет двойной корень

$$\lambda=\lambda'=1.$$

При обходе вокруг точки $t=\infty$ мы должны взять

$$mZ+nF=F-ikZ,$$
$$pZ+qF=Z,$$
$$m=-ik, \quad n=1, \quad p=1, \quad q=0,$$
$$M=0, \quad N=1, \quad P=1, \quad Q=0.$$

Получим

$$Z^*=Z,$$
$$F^*=-2ikZ+F.$$

Характеристическое уравнение имеет двойной корень

$$\mu=\mu'=1.$$

Наконец, около точки $t=1$ имеем:

$$mZ+nF=F,$$
$$pZ+qF=Z,$$
$$M=-ik, \quad N=1, \quad P=0, \quad Q=i,$$
$$m=0, \quad n=1, \quad p=1, \quad q=0,$$

откуда, после вычислений, найдем:

$$Z^*=-Z+\frac{2i}{k}F,$$
$$F^*=-F.$$

Характеристическое уравнение имеет двойной корень

$$\nu=\nu'=-1.$$

Вычислим теперь показатели наших функций $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$. Имеем:

$$\alpha=\frac{\lg\lambda}{2\pi i}=\frac{\lg 1}{2\pi i}=l, \qquad \alpha'=\frac{\lg\lambda'}{2\pi i}=\frac{\lg 1}{2\pi i}=l',$$
$$\beta=\frac{\lg\mu}{2\pi i}=\frac{\lg 1}{2\pi i}=m, \qquad \beta'=\frac{\lg\mu'}{2\pi i}=\frac{\lg 1}{2\pi i}=m',$$
$$\gamma=\frac{\lg\nu}{2\pi i}=\frac{\lg(-1)}{2\pi i}=\frac{1}{2}+n, \quad \gamma'=\frac{\lg\nu'}{2\pi i}=\frac{\lg(-1)}{2\pi i}=\frac{1}{2}+n'.$$

Здесь l, l', m, m', n, n' — целые числа. Для их определения обратимся к функции z. На основании формул (21) и (22) имеем

$$z=\int_0^t \frac{Z\,dt}{\sqrt{(t-a)\,(b-t)}}+i(h_2+h_0).$$

Подставим вместо Z линейную комбинацию функций Y_1 и Y_2, определяемых для $|t|<1$ формулами (7). Член с наименьшим показателем степени содержит t^α и после интегрирования дает

$$\int_0^t t^\alpha\,dt=\left.\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^t.$$

Для существования этого интеграла необходимо выполнение неравенства

$$\alpha+1>0,$$

или

$$\alpha>-1.$$

Так как $\alpha = l$ целое, то необходимо

$$\alpha \geqslant 0.$$

Точно так же

$$\alpha' \geqslant 0.$$

Около бесконечно удаленной точки будем при вычислении z иметь слагаемое вида (с точностью до постоянного множителя):

$$\int_{\infty}^{t} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = \int_{\infty}^{t} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta+1} dt + \ldots = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\Bigg|_{\infty}^{t} + \ldots$$

Для существования этого интеграла необходимо выполнение неравенства

$$\beta > 0.$$

Так как β есть целое число, то отсюда вытекает

$$\beta \geqslant 1.$$

Таким же образом находим

$$\beta' \geqslant 1.$$

Для γ и γ' должны выполняться те же неравенства, что и для α и α':

$$\gamma > -1, \quad \gamma' > -1,$$

т. е. мы должны иметь

$$\frac{1}{2} + n > -1, \quad \frac{1}{2} + n' > -1;$$

значит,

$$n \geqslant -1, \quad n' \geqslant -1,$$

откуда

$$\gamma \geqslant -\frac{1}{2}, \quad \gamma' \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Сумма всех показателей должна удовлетворять соотношению Фукса

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Это возможно лишь в том случае, если мы во всех неравенствах для показателей, соединенных со знаком равенства, возьмем знак равенства. Тогда получаем:

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \beta = \beta' = 1, \quad \gamma = \gamma' = -\frac{1}{2}.$$

Система функций Z и F может быть определена с помощью функции Римана:

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & t \\ \gamma' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & t \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \end{Bmatrix}. \tag{23}$$

Пользуясь преобразованием Римана, можно свести эту схему к такой, где два показателя будут равны нулю. А именно:

$$P\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & t \end{pmatrix} = t^{\alpha}(1-t)^{\gamma} P\begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & t \end{pmatrix}. \tag{24}$$

В нашем случае это дает:

$$P\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & & & t \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix} = (1-t)^{-\frac{1}{2}} P\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ & & & t \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \end{pmatrix}.$$

Функция P правой части последнего равенства представляет систему решений гипергеометрического уравнения

$$t(1-t)\frac{d^2U}{dt^2} + \{c-(a+b+1)t\}\frac{dU}{dt} - abU = 0, \tag{25}$$

где a, b, c связаны с показателями $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma'$ следующими соотношениями:

$$a = \alpha + \beta + \gamma, \quad b = \alpha + \beta' + \gamma, \quad c = 1 + \alpha - \alpha'.$$

В нашем случае

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 1,$$

и следовательно, гипергеометрическое уравнение выглядит так:

$$t(1-t)\frac{d^2U}{dt^2} + (1-2t)\frac{dU}{dt} - \frac{1}{4}U = 0.$$

Обозначим через U_1 и U_2 линейно независимые решения этого уравнения. Можно взять

$$U_1 = F(a, b, c, t) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t\right),$$

$$U_2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t\right)\ln t + G(t).$$

Здесь $F(a, b, c, t)$ — гипергеометрическая функция, определяемая при $|t| < 1$ рядом

$$F(a, b, c, t) = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}t + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}t^2 + \ldots$$

В нашем случае

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2 t^n,$$

$$G(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2 \sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^{m-1}}{m}t^n$$

(Schlesinger, стр. 240, или E. Goursat, Equation d'Euler et de Gauss).

Кроме того, известно, что функции U_1 и U_2 могут быть представлены в виде эллиптических интегралов:

$$U_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-tu)}},$$

$$U_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-tu)}}$$

(см. Schlesinger, стр. 238, или Goursat).

Наши функции Z и F представляют линейные комбинации функций U_1 и U_2, умноженных на $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$:

$$Z=\frac{AU_1+BU_2}{\sqrt{1-t}},$$

$$F=\frac{CU_1+DU_2}{\sqrt{1-t}},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, подлежащие определению.

Рассмотрим промежуток $0<t<1$. Так как функции U_1 и U_2 имеют вещественные значения в этом промежутке, так же, как и $\sqrt{1-t}$, то условие

$$Y(iF)=0$$

приводит к требованию, чтобы C и D были чисто мнимыми:

$$C=C'i, \quad D=D'i.$$

Положим

$$A=A'+iA'', \quad B=B'+iB''.$$

Тогда

$$F-ikZ=\frac{1}{\sqrt{1-t}}\left\{C'iU_1+D'iU_2-ik(A'+iA'')U_1-ik(B'+iB'')U_2\right\}.$$

Из условия $I(F-ikZ)=0$ на отрезке $(0, 1)$ вытекает:

$$C'=kA', \quad D'=kB'.$$

Обратимся к отрезку $(-\infty, 0)$. При переходе от положительных значений t к отрицательным будем иметь:

$$\lg t=\lg|t|+\pi i,$$

$$U_2=F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t\right)\lg|t|+\pi iF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t\right)+G(t).$$

Следовательно,

$$Z=\frac{(A'+iA'')F+(B'+iB'')[F\lg|t|+G+\pi iF]}{\sqrt{1-t}}.$$

Для того чтобы $I(Z)=0$ при $t<0$, необходимо выполнение равенств

$$A''+\pi B'=0, \quad B''=0.$$

Получаем:

$$Z=\frac{(A-\pi iB)U_1+BU_2}{\sqrt{1-t}},$$

$$F=\frac{ikAU_1+ikBU_2}{\sqrt{1-t}}.$$

(Мы отбросили значок $'$ у A' и B', изменив таким образом обозначения.)

Если теперь перейти к значениям $t>1$, то функции U_1 и U_2 нужно будет заменить их аналитическими продолжениями. А именно, имеем такие соотношения:

$$U_1=\frac{4\lg 2}{\pi}V_1-\frac{1}{\pi}V_2,$$

$$U_2=\frac{16\lg^2 2-\pi^2}{\pi}V_1-\frac{4\lg 2}{\pi}V_2,$$

где

$$V_1 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-t\right),$$
$$V_2 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-t\right)\lg(1-t) + G(1-t)$$

(функции F и G представляются рядами, сходящимися внутри круга радиуса 1 с центром в точке $t=1$).

Теперь можем переписать Z в виде:

$$Z = \frac{(A-\pi Bi)\left(\frac{4\lg 2}{\pi}V_1 - \frac{1}{\pi}V_2\right) + B\left(\frac{16\lg^2 2 - \pi^2}{\pi}V_1 - \frac{4\lg 2}{\pi}V_2\right)}{\sqrt{1-t}}.$$

Принимая во внимание, что при $t > 1$

$$\sqrt{1-t} = -i\sqrt{t-1},$$
$$\lg(1-t) = \lg(t-1) - \pi i,$$

мы можем выделить явно мнимые члены в выражении для Z. А именно,

$$I(Z) = \frac{(A + 4B\lg 2)\left[\frac{4\lg 2}{\pi}F(1-t) - \frac{1}{\pi}F(1-t)\lg(t-1) - \frac{1}{\pi}G(1-t)\right]}{-\sqrt{t-1}}.$$

Условие $I(Z)=0$ при $t>1$ приводит к равенству

$$A + 4B\lg 2 = 0.$$

Проверка показывает, что тогда условие $I(F)=0$ для $t>1$ выполняется тождественно.

Теперь получаем для Z и F формулы, содержащие лишь одну постоянную B:

$$Z = \frac{B}{\sqrt{1-t}}\left\{-(4\lg 2 + \pi i)U_1 + U_2\right\},$$
$$F = \frac{ikB}{\sqrt{1-t}}\left\{-4\lg 2\, U_1 + U_2\right\}.$$

Остается определить постоянную B, а также числа a и b. Обозначим для краткости

$$\frac{-(4\lg 2 + \pi i)U_1 + U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}} = U(t),$$
$$\frac{ik(-4\lg 2\, U_1 + U_2)}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}} = V(t).$$

Тогда z и f будут выражаться через интегралы от этих функций:

$$z = B\int_a^t U(t)\,dt,$$

$$f = B\int_a^t V(t)\,dt + \varphi_1.$$

При $t=1$ $z=hi$; при $t=b$ $z=l$. Поэтому

$$h_1 i = B\int_a^1 U(t)\,dt,$$

$$l = B\int_a^b U(t)\,dt.$$

Далее,

$$h_2 i = B \int_b^\infty U(t)\,dt.$$

Введем отношения

$$\frac{h_1}{l} = H, \quad \frac{h_2}{l} = h, \quad \frac{B}{l} = A.$$

Тогда будем иметь:

$$H = -iA \int_a^1 U(t)\,dt,$$

$$h = -iA \int_b^\infty U(t)\,dt,$$

$$1 = A \int_a^b U(t)\,dt.$$

Из последних трех уравнений можно определить A, a и b, когда заданы H и h. Однако, вследствие большой трудности определения a и b из этой системы уравнений, можно было бы поступить так: считать заданными a и b и искать H, h, A. Произведя вычисления для достаточно большого числа значений a и b, найдем серию значений A, h и H, по которой можно будет, обратно, по заданным h и H отыскивать A, a и b.

Специальный интерес представляет определение «депрессионной кривой» AB (т. е. линии свободной поверхности), вычисление длины промежутка высачивания h_0 и расхода Q через сечение BC. Последние величины вычисляются по формулам

$$h_0 = -iAl \int_{-\infty}^0 U(t)\,dt.$$

$$Q = -iAl \int_a^1 V(t)\,dt.$$

Уравнение свободной поверхности найдем, если отделим вещественную и мнимую части в уравнении

$$z = Al \int_1^t U(t)\,dt + hi,$$

где t пробегает вещественные значения от 1 до 0.

Указанные вычисления являются довольно длинными, но технически вполне выполнимыми. Мы надеемся проделать эту вычислительную работу в Математическом институте Академии Наук СССР.

Отметим один частный случай задачи: если нижний бьеф отсутствует, т. е. если $h_2 = 0$, то точка b должна уйти в бесконечность. Положим

$$B = B_1 \sqrt{b}.$$

Тогда, переходя в формулах $U(t)$ и $V(t)$ к пределу при $b \to \infty$, получим:

$$z = B_1 \int_a^t \frac{-(4\lg 2 + \pi i) U_1 + U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)}} dt,$$

$$f = ikB_1 \int_a^t \frac{-4\lg 2\, U_1 + U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)}} dt + \varphi_1.$$

Далее,

$$h_1 i = B_1 \int_a^1 U(t)\, dt,$$

$$l = B_1 \int_a^\infty U(t)\, dt,$$

$$Q = -iB_1 \int_a^1 V(t)\, dt, \quad h_0 = -iB_1 \int_\infty^0 U(t)\, dt,$$

где

$$U(t) = \frac{-(4\lg 2 + \pi i) U_1 + U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)}},$$

$$V(t) = \frac{ik(-4\lg 2\, U_1 + U_2)}{\sqrt{(1-t)(t-a)}}.$$

§ 3

В качестве второго примера возьмем задачу о фильтрации воды через экран, имеющий в сечении форму прямоугольного треугольника.

Пусть мы имеем бассейн глубины h, из которого вода вытекает через экран CDF в атмосферу (фиг. 5). Угол FCD прямой, ECD — непроницаемое основание. Отрезок CD равен l; θ и θ_0 — углы, составляемые сторонами CF и DF с горизонтальной линией, BA — свободная поверхность.

Уравнение стороны CB

$$y\cos\theta - x\sin\theta = 0$$

может быть записано в виде

$$I(ze^{-i\theta}) = 0.$$

Уравнение стороны CD

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0$$

можно записать так:

$$I(ize^{-i\theta}) = 0.$$

Уравнение стороны DF:

$$I(ze^{-i\theta_0}) = \text{const}.$$

Фиг. 5

Отобразим область $ABCDA$ на верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного t так, чтобы точка A перешла в точку $t = 0$,

B — в точку $t=1$, C — в точку $t=a$ и D — в бесконечно удаленную точку вещественной оси. Введем функции:

$$z_1=\frac{dz}{dt}, \quad f_1=\frac{df}{dt}.$$

Тогда условия на контуре будут те, которые выписаны на соответствующих отрезках фиг. 6.

$-\infty$ $I(z_1e^{-i\theta_0})=0$ 0 $I(f_1)=0$ 1 $I(if_1)=0$ a $I(iz_1e^{-i\theta})=0$ ∞

D $I(if_1+kz_1)=0$ A $I(if_1+kz_1)=0$ B $I(z_1e^{-i\theta})=0$ C $I(f_1)=0$ D

Фиг. 6

Чтобы сделать точку $t=a$ обыкновенной, будем рассматривать функции

$$Z=\sqrt{a-t}\,z_1e^{-i\theta}, \quad F=\sqrt{a-t}\,f_1.$$

Когда $t<a$, $\sqrt{a-t}$ вещественно; будем считать $\arg(a-t)=0$. Когда $t>a, \sqrt{a-t}=-i\sqrt{t-a}$. Для функций Z и F условия на контуре изобразятся схемой фиг. 7.

$-\infty$ $I(Ze^{i(\theta-\theta_0)})=0$ 0 $I(iF+Ke^{i\theta}Z)=0$ 1 $I(Z)=0$ a $I(Z)=0$ ∞

D $I(iF+Ke^{i\theta}Z)=0$ A $I(F)=0$ B $I(iF)=0$ C $I(iF)=0$ D

Фиг. 7

По формулам (4) и (5) вычислим подстановки при обходе вокруг особых точек. Получим:

При обходе точки $t=0$

$$Z^*=e^{2i\theta_0}Z+\frac{2i}{k}e^{-i(\theta-2\theta_0)}F,$$

$$F^*=kie^{i\theta}(e^{2i\theta_0}-1)Z+(1-2e^{2i\theta})F.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} e^{2i\theta_0}-\lambda & \frac{2i}{k}e^{i(2\theta_0-\theta)} \\ kie^{i\theta}(e^{2i\theta_0}-1) & 1-2e^{2i\theta}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2-\lambda(1-e^{2i\theta_0})-e^{2i\theta_0}=0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda=1, \quad \lambda'=e^{i(2\theta_0+\pi)}.$$

При обходе вокруг точки $t=1$

$$Z^*=e^{-2i\theta}Z+\frac{2i}{k}e^{-i\theta}F,$$

$$F^*=-F.$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} e^{-2\theta i}-\nu & \frac{2i}{k}e^{-i\theta} \\ 0 & -1-\nu \end{vmatrix}=0$$

имеет корни

$$\nu=1, \quad \nu'=e^{-2\theta i}.$$

В окрестности бесконечно далекой точки имеем:

$$Z^* = e^{-2i(\theta_0-\theta)}Z,$$
$$F^* = ike^{i(\theta-\theta_0)}(e^{2\theta_0 i}-1)Z + F.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} e^{-2i(\theta_0-\theta)}-\mu & 0 \\ ike^{-i\theta}(e^{2\theta_0 i}-1) & 1-\mu \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\mu = 1, \quad \mu' = e^{2i(\theta-\theta_0)}.$$

Показатели α, α', β, β', γ, γ' будут иметь такие значения:

$$\alpha = \frac{\lg\lambda}{2\pi i} = l, \qquad \alpha' = \frac{\lg\lambda'}{2\pi i} = \frac{1}{2} + l',$$
$$\beta = \frac{\lg\mu}{2\pi i} = m, \qquad \beta' = \frac{\lg\mu'}{2\pi i} = \frac{\theta-\theta_0}{\pi} + m',$$
$$\gamma = \frac{\lg\nu}{2\pi i} = \frac{1}{2} + n, \quad \gamma' = \frac{\lg\nu'}{2\pi i} = -\frac{\theta}{\pi} + n'.$$

Те же самые неравенства, что и в § 2:

$$\alpha+1>0, \quad \alpha'+1>0,$$
$$\gamma+1>0, \quad \gamma'+1>0$$

приводят здесь к неравенствам, соединенным со знаком равенства:

$$\alpha \geqslant 0, \qquad \alpha' \geqslant \frac{\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2},$$
$$\gamma \geqslant -\frac{1}{2}, \qquad \gamma' \geqslant -\frac{\theta}{\pi}.$$

Около бесконечно далекой точки нужно поставить требование о сходимости интеграла

$$\int\limits_\infty^t \left(\frac{1}{t}\right)^\beta \frac{dt}{\sqrt{t-a}} = \int\limits_\infty^t t^{-\beta-\frac{1}{2}}\,dt + \ldots = \left.\frac{t^{-\beta+\frac{1}{2}}}{-\beta+\frac{1}{2}}\right|_\infty^t + \ldots,$$

для чего необходимо выполнение неравенства

$$\beta > \frac{1}{2}.$$

Точно так же должно быть

$$\beta' > \frac{1}{2}.$$

Принимая во внимание найденные выше для β и β' значения, получим:

$$\beta \geqslant 1, \quad \beta' \geqslant 1 + \frac{\theta-\theta_0}{\pi}.$$

Условие

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma' = 1$$

приводит к необходимости принять

$$\alpha = 0, \ \alpha' = \frac{\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2}, \ \beta = 1, \ \beta' = 1 + \frac{\theta-\theta_0}{\pi}, \ \gamma = -\frac{1}{2}, \ \gamma' = -\frac{\theta}{\pi}.$$

Введем такие обозначения:

$$\frac{\theta}{\pi} = \varepsilon, \quad \frac{\theta_0}{\pi} = \delta.$$

Тогда

$$\alpha=0,\ \alpha'=\delta-\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \beta'=1+\varepsilon-\delta,\ \gamma=-\frac{1}{2},\ \gamma'=-\varepsilon.$$

Теперь составим схему Римана, которой определяется система функций Z и F (см. формулу (24)):

$$P\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{1}{2} & \\ \delta-\frac{1}{2}, & 1+\varepsilon-\delta, & -\varepsilon & t\end{pmatrix}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}P\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \delta-\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}+\varepsilon-\delta, & \frac{1}{2}-\varepsilon & t\end{pmatrix}.$$

Вычислим величины a, b, c:

$$a=\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2},$$

$$b=\alpha+\beta'+\gamma=\frac{1}{2}+\varepsilon-\delta,$$

$$c=1+\alpha-\alpha'=\frac{3}{2}-\delta.$$

Для $|t|<1$ можем взять за линейно независимые решения функции:

$$P_1=\frac{F(a,b,c,t)}{\sqrt{1-t}}=\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\varepsilon-\delta,\frac{1}{2}+\delta,t\right)}{\sqrt{1-t}}=\frac{F_1}{\sqrt{1-t}},$$

$$P_2=\frac{t^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c,\ t)}{\sqrt{1-t}}=$$

$$=\frac{t^{-\frac{1}{2}+\delta}F\left(\delta,\ 1+\varepsilon-2\delta,\ \frac{3}{2}-\delta,\ t\right)}{\sqrt{1-t}}=\frac{F_2}{\sqrt{1-t}}.$$

Z и F можно теперь представить в виде:

$$Z=AP_1+BP_2=\frac{AF_1+BF_2}{\sqrt{1-t}},$$

$$F=CP_1+DP_2=\frac{CF_1+DF_2}{\sqrt{1-t}}.$$

Вернемся опять к условиям на контуре, чтобы иметь возможность определить постоянные A, B, C, D. Так как, при $0<t<1$, $IF=0$, то C и D должны быть вещественными числами. Положим

$$A=A'+iA'',\quad B=B'+iB''.$$

Нетрудно проверить, что

$$I(iF+ke^{i\theta}Z)=0=\frac{(C+k\cos\theta A''+k\sin\theta A')F_1+(D+k\cos\theta B'+k\sin\theta B'')F_2}{\sqrt{1-t}}.$$

Отсюда должно быть

$$C+k\sin\theta A'+k\cos\theta A''=0, \tag{26}$$

$$D+k\sin\theta B''+k\cos\theta B'=0. \tag{27}$$

Перейдем к $t<0$. Здесь имеем:

$$t^{\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}}=(-t)^{\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}}(\sin\theta_0-i\cos\theta_0),$$

$$I(iF+ke^{i\theta}Z)=\{(C+k\cos\beta A''+k\sin\beta A')F_1+[D\sin\gamma-k\cos(\beta+\gamma)B'+$$

$$+k\sin(\beta+\gamma)B'']F_2\}(1-t)^{-\frac{1}{2}}=0,$$

откуда должны иметь

$$D \sin\gamma - k\cos(\beta+\gamma) B' + k \sin(\beta+\gamma) B'' = 0. \tag{28}$$

Для того чтобы получить другие уравнения между A', A'', B', B'', C и D, перейдем от промежутка $0 < t < 1$ к промежутку $t > 1$. Для этого нам придется заменить гипергеометрические функции F_1 и F_2 их аналитическими продолжениями. Будем рассматривать сначала общий случай, когда α и α', β и β', γ и γ' не равны между собой и не отличаются на целые слагаемые. Тогда имеем такие формулы (см. E. Goursat, Équation d'Euler et de Gauss):

$$F_1 = F(a, b, c, t) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b+1-c, 1-t)$$
$$+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-t)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-t),$$
$$F_2 = t^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, t)$$
$$= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} F(a, b, a+b+1-c, 1-t)$$
$$+ \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)} \times$$
$$\times (1-t)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-t).$$

Гипергеометрические ряды, стоящие в правой части этих равенств, сходятся внутри круга, радиус которого равен единице, с центром в точке $t = 1$.

При $t > 1$ имеем: $\arg(1-t) = \pi$ (если при $0 < t < 1$ $\arg(1-t) = 0$); поэтому

$$\sqrt{1-t} = i\sqrt{t-1},$$

$$(1-t)^{c-a-b} = (t-1)^{c-a-b}[\cos\pi(c-a-b) + i\sin\pi(c-a-b)].$$

Приняв во внимание эти соотношения в условиях $IZ = 0$, $IiF = 0$ при $t > 1$, получим еще три уравнения

$$A' \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + B' \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} = 0, \tag{29}$$

$$[A'\cos\pi(c-a-b) + A''\sin\pi(c-a-b)] \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + [B'\cos\pi(c-a-b) -$$
$$- B''\sin\pi(c-a-b)] \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)} = 0, \tag{30}$$

$$C\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + D\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)} = 0. \tag{31}$$

Решение нашей однородной системы уравнений (26)—(31) приводит к таким выражениям всех постоянных через постоянную D:

$$C = \mu D,$$

где

$$\mu = -\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)\Gamma(c)} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\delta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon-\delta\right)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\varepsilon-2\delta)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\delta\right)},$$

$$A' + iA'' = -\frac{i\mu D}{k} e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}-2\theta_0\right)} = -\frac{i\mu D}{k} e^{\pi i\left(\varepsilon+\frac{1}{2}-2\delta\right)},$$

$$B' + iB'' = -\frac{iD}{k} e^{-i\theta} = -\frac{iD}{k} e^{-i\pi\varepsilon}.$$

Теперь в функциях Z и F остается одна произвольная постоянная D:

$$Z = -\frac{iD}{k}\,\frac{\mu e^{\pi i\left(\varepsilon+\frac{1}{2}-2\delta\right)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon-\delta, \frac{1}{2}+\delta, t\right) + e^{-\pi i\varepsilon} t^{\delta-\frac{1}{2}} F\left(\delta, 1+\varepsilon-2\delta, \frac{3}{2}-\delta, t\right)}{\sqrt{1-t}},$$

$$F = D\,\frac{\mu F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon-\delta, \frac{1}{2}+\delta, t\right) + t^{\delta-\frac{1}{2}} F\left(\delta, 1+\varepsilon-2\delta, \frac{3}{2}-\delta, t\right)}{\sqrt{1-t}}.$$

Далее, найдем

$$z = \int_a^t \frac{Ze^{i\pi\varepsilon}}{\sqrt{a-t}}\,dt = D\int_0^t U(t)\,dt,$$

$$f = \int_a^t \frac{F}{\sqrt{a-t}}\,dt + \varphi_1 = D\int_0^t V(t)\,dt + \varphi_1.$$

Здесь введены обозначения:

$$U(t) = -\frac{i}{k}\,\frac{\mu e^{\pi i\left(\frac{1}{2}+2\varepsilon-2\delta\right)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon-\delta, \frac{1}{2}+\delta, t\right) + t^{\delta-\frac{1}{2}} F\left(\delta, 1+\varepsilon-2\delta, \frac{3}{2}-\delta, t\right)}{\sqrt{(1-t)(a-t)}},$$

$$V(t) = \frac{\mu F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\varepsilon-\delta, \frac{1}{2}+\delta, t\right) + t^{\delta-\frac{1}{2}} F\left(\delta, 1+\varepsilon-2\delta, \frac{3}{2}-\delta, t\right)}{\sqrt{(1-t)(a-t)}}.$$

Для того чтобы найти постоянные D и a, используем то обстоятельство, что нам должны быть известны глубина бассейна h и расстояние l. Так как комплексная координата точки B есть

$$z = h\cos\theta + ih\sin\theta = he^{i\theta},$$

а для точки D

$$z = l\sin\theta - il\cos\theta = -ile^{i\theta},$$

то получаем:

$$he^{i\theta} = D\int_a^1 U(t)\,dt,$$

$$-ile^{i\theta} = D\int_a^{\infty} U(t)\,dt.$$

Из этой системы уравнений, задавая ряд значений для a, можем найти отношения $\frac{h}{l}$ и $\frac{D}{l}$. Проделав достаточно большое число вычислений, сможем по h и l отыскивать a и D.

Расход Q через сечение BC можно вычислить теперь по формуле:

$$Q = D\int_a^1 V(t)\,dt.$$

Обозначим комплексную координату точки A — верхней точки выхода грунтовой воды — через $l_0 + ih_0$. Будем иметь

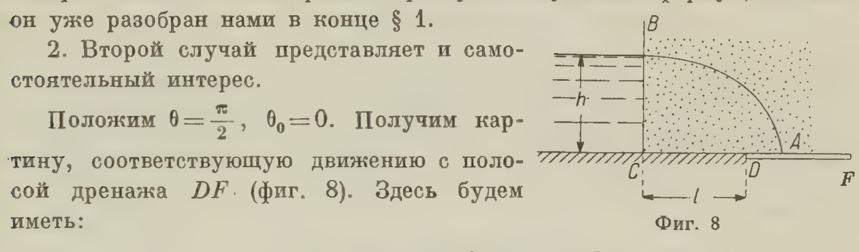
$$l_0 + ih_0 = -ile^{i\theta} + D\int_{-\infty}^{0} U(t)\,dt.$$

Отметим два частных случая рассмотренного движения, когда общие формулы не годятся, так как решения будут содержать логарифм.

1. Пусть $\theta=\theta_0=\frac{\pi}{2}$. Это есть вместе с тем частный случай, отмеченный в конце § 1. Рассмотрение его может представить для нас интерес лишь с точки зрения проверки полученных формул, так как он уже разобран нами в конце § 1.

2. Второй случай представляет и самостоятельный интерес.

Положим $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta_0=0$. Получим картину, соответствующую движению с полосой дренажа DF (фиг. 8). Здесь будем иметь:



Фиг. 8

$$\alpha=0,\ \alpha'=-\frac{1}{2},\ \beta=1,\ \beta'=\frac{3}{2},\ \gamma=-\frac{1}{2},\ \gamma'=-\frac{1}{2}.$$

Поменяем местами α и α', отчего наши решения, как известно, не изменятся, т. е. положим

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \alpha'=0,\ \beta=1,\ \beta'=\frac{3}{2},\ \gamma=-\frac{1}{2},\ \gamma'=-\frac{1}{2}.$$

Тогда будем иметь:

$$a=\alpha+\beta+\gamma=0,$$
$$b=\alpha+\beta'+\gamma=\frac{1}{2},$$
$$c=1+\alpha-\alpha'=\frac{1}{2}.$$

Гипергеометрическое уравнение у нас не будет содержать функции Y:

$$t(1-t)Y''+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t\right)Y'=0.$$

Непосредственное его интегрирование дает

$$Y=C_1+C_2\lg\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}.$$

Схема Римана здесь имеет вид

$$P\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & & & t\\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix}=t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \\ & & & t\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \end{pmatrix},$$

причем $P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \\ & & & t\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \end{pmatrix}$ представляет совокупность решений нашего гипергеометрического уравнения

$$1 \quad \text{и} \quad \lg\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}.$$

Следовательно, для Z и F имеем

$$Z = \frac{A + B \lg \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t(1-t)}},$$

$$F = \frac{C + D \lg \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t(1-t)}},$$

где A, B, C, D — постоянные. Для их определения обратимся к условиям на контуре. Для $0 < t < 1$ имеем $I(iF) = 0$, откуда следует, что C и D чисто мнимые:

$$C = C'i, \quad D = D'i.$$

Положим

$$A = A' + iA'', \quad B = B' + iB''.$$

Условие $I(F - ikZ) = 0$ приводит к равенствам

$$C' = kA', \quad D' = kB'.$$

Далее, для $-\infty < t < 0$ можно написать, выделяя мнимости:

$$Z = \frac{A' + iA'' + (B' + iB'') \lg \dfrac{1+i\sqrt{-t}}{1-i\sqrt{-t}}}{i\sqrt{-t(1-t)}},$$

$$F = \frac{C'}{\sqrt{-t(1-t)}} + \frac{D' \lg \dfrac{1+i\sqrt{-t}}{1-i\sqrt{-t}}}{\sqrt{-t(1-t)}}.$$

Здесь lg имеет чисто мнимое значение, а потому для выполнения условия $I(F) = 0$ необходимо, чтобы $D' = 0$. Тогда и $B' = 0$.

Чтобы $I(iZ) = 0$, необходимо, чтобы $A'' = 0$. Изменим теперь обозначения. Пусть

$$A' = A, \quad B'' = B,$$

тогда $C' = kA$.

Теперь можем написать

$$Z = \frac{A + Bi \lg \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t(1-t)}},$$

$$F = \frac{kAi}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Посмотрим, что будет при $t > 1$. Можем написать, выделяя явные мнимости:

$$Z = \frac{A}{-i\sqrt{t(t-1)}} + \frac{Bi\left[\lg \dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}} - \pi i\right]}{-i\sqrt{t(t-1)}},$$

$$F = \frac{ikA}{-i\sqrt{t(t-1)}}.$$

Видим, что условие $I(F)=0$ выполнено. Для выполнения условия $I(Z)=0$ необходимо

$$A+B\pi=0 \quad \text{или} \quad B=-\frac{A}{\pi}.$$

Теперь имеем

$$Z=\frac{A\left(1-\frac{i}{\pi}\lg\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{t(1-t)}},$$

$$F=\frac{kAi}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Переходим, наконец, к составлению выражений для функций z и f, после чего сможем определить последнюю из произвольных постоянных A. Имеем:

$$z=A\int_1^t\frac{1-\frac{i}{\pi}\lg\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t(1-t)(t-a)}}\,dt+hi,$$

$$f=ikA\int_1^t\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(t-a)}}+C_2.$$

Так как при $t=1$ $z=hi$, $f=\varphi_1+i\psi_1$, то

$$C_1=hi,$$
$$C_2=\varphi_1+i\psi_1.$$

Так как при $t=a$ имеем $z=0$, $f=\varphi_1$, то формула для z дает

$$0=A\int_1^a\Phi(t)\,dt+hi, \tag{32}$$

где положено

$$\Phi(t)=\frac{1-\frac{i}{\pi}\lg\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}}{\sqrt{t(1-t)(t-a)}},$$

а формула для f принимает вид

$$\psi_1=-kA\int_1^a\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(a-t)}}.$$

Далее, если в формуле для z положить $t=\infty$ и воспользоваться равенством (32), то получим

$$l=A\int_a^\infty\Phi(t)\,dt.$$

Это равенство вместе с равенством

$$h=Ai\int_1^a\Phi(t)\,dt$$

определяет как произвольную постоянную A, так и величину a. Однако, ввиду сложности вычисления a, можно поступить так же, как в предыдущей задаче: задаться системой значений a и найти соответствующие

значения $\frac{A}{l}$ и $\frac{h}{l}$. Тогда по заданным l и a можно будет найти A и h, а следовательно, при достаточном числе вычислений, по заданным l и h можно будет найти A и a. После этого нетрудно будет найти $\psi_1 = Q$, т. е. расход через сечение BC, а также отрезок l_0 — часть дренажа, занятую жидкостью:

$$l_0 = A \int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\, dt.$$

Заметим в заключение, что из исследований Б. Б. Девисона ([4]) вытекает, что наши задачи имеют единственное решение. Отсюда следует и однозначность зависимости параметров a, b, A от H, h и l в первой задаче и параметров a, A от l и h — во второй.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
2.XII.1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Девисон Б. Б., Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины, Зап. Гос. гидролог. ин-та, Л. 1932, т. VI, стр. 11—19.
[2] Девисон Б. Б., Фильтрация грунтовых вод через земляную перемычку, Труды IV гидрологической конференции Балтийских стран, 1933.
[3] Davison B., On the steady two-dimensional motion of ground water with a free surface, Phil. Mag., 1936, vol. 21, № 143, p. 881—903.
[4] Davison B., On the steady two-dimensional motion of ground water through a wide Prismatic Dam, Phil. Mag., 1936, vol. 21, p. 904.
[5] Девисон Б. Б. и Христианович С. А., О некоторых проблемах теоретической гидрологии, Успехи матем. наук, вып. II, 1936, стр. 238—253.
[6] Hamel G., Über Grundwasserströmung, ZAMM, 1934, Bd. 14, H. 3, S. 129—157.
[7] Hamel G. und Günther E., Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung, ZAMM, 1935, Bd. 15, H. 3, S. 255—265.
[8] Wedernikow V. V., Über die Sicherung und Wasserbewegung mit freier Oberfläche, ZAMM 1937, Bd. 17, H. 3, S. 155—168.

P. POLOUBARINOVA-KOCHINA. AN APPLICATION OF THE THEORY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO CERTAIN MOVEMENTS OF GROUND WATER

SUMMARY

Two problems are solved in this paper:

1. Suppose that we have an earthen dam with vertical walls on an impermeable foundation (fig. 3). We map the domain $ABCDEA$ on the upper half-plane of the complex variable t and consider the functions

$$Z = \frac{dz}{dt}\sqrt{(t-a)(b-t)}, \quad F = \frac{df}{dt}\sqrt{(t-a)(b-t)}.$$

The boundary conditions to be satisfied by the functions Z and F of a complex variable are represented on fig. 4.

In § 1 we find the substitution of the functions Z and F after a complete round about a singular point (formulae (4) or (5)). Applying

the formulae (4) we find the substitutions corresponding to the points $t=0$, ∞, 1. Under the conditions of the problem the functions Z and F can possess only regular singularities.

Having found the roots λ, λ'; μ, μ'; ν, ν' of the characteristic equation, we then find the indices of our functions:

$$\alpha = \frac{\lg \lambda}{2\pi i}, \ \alpha', \ \beta, \ \beta', \ \gamma, \ \gamma'.$$

Turning then to the formula for Z and to Fuchs relation:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1,$$

we determine the indices completely. After that we form Riemann's function with the help of formulae (23) and (24). The solution of the problem is obtained in form of integrals of hypergeometric functions divided by $\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}$. The three constants A, a, and b can be determined by using the formulae for the lengths h_1, l, h_2.

2. The problem of filtration of water through a screen having for its cross-section a rightangled triangle (fig. 5), as well as the particular case of this problem represented on fig. 8, can be solved similarly.